

WALTER WEGNER

**FIZYKA DLA STUDENTÓW
KIERUNKÓW TECHNICZNYCH**

Wrocław 2018

SPIS TREŚCI

PRZEDMOWA DO WYDANIA IV	5
1. ANALIZA BŁĘDÓW POMIAROWYCH	7
1.1. Wielkości fizyczne. Jednostki układu SI	7
1.2. Błędy pomiarów fizycznych	8
1.3. Błąd bezwzględny i względny	8
1.4. Średnie klasyczne	11
1.5. Miary rozproszenia	13
1.6. Przedziały ufności dla wartości przeciętnej m populacji generalnej	13
1.7. Porównanie zbiorów	15
1.8. Korelacja i regresja liniowa	15
1.9. Zadania do rozdziału 1	17
2. PRZEDMIOT I METODOLOGIA FIZYKI	20
2.1. Metody badań fizycznych. Modele matematyczne	20
2.2. Rodzaje oddziaływań w fizyce	24
2.3. Granice fizyki klasycznej. Zasada nieoznaczoności Heisenberga	25
2.4. Zadania do rozdziału 2	28
3. KINEMATYKA PUNKTU MATERIALNEGO	30
3.1. Układy odniesienia inercjalne i nieinercjalne	30
3.2.1. Ruch jednostajnie przystoliniowy i ruch jednostajnie zmienny	32
3.2.2. Rzut poziomy	38
3.2.3. Rzut ukośny	39
3.2.4. Rzut do góry. Swobodny spadek	41
3.2.5. Ruch po okręgu	41
3.2.6. Ruch harmoniczny	43
3.3. Niezmienniczość Galileusza i niezmienniczość relatywistyczna	44
3.4. Zadania do rozdziału 3	52
4. PRAWA RUCHU	55
4.1. Zasady Newtona, opory ruchu	55
4.2. Ruch w polu elektrycznym, magnetycznym i grawitacyjnym	59
4.2.1. Ruch w polu elektrycznym	63
4.2.2. Ruch w polu magnetycznym	65
4.3. Ruch w nieinercjalnym układzie odniesienia	69
4.4. Zadania do rozdziału 4	72
5. ZASADY ZACHOWANIA	75
5.1. Pęd i popęd	75
5.2. Praca i moc	76
5.3. Moment siły, moment pędu	77
5.4. Ruch w polu centralnej siły zachowawczej	78
5.5. Energia i pęd w teorii relatywistycznej	79

5.5.1. Pęd relatywistyczny	79
5.5.2. Energia relatywistyczna	81
5.6. Efekt Dopplera w fizyce klasycznej i relatywistycznej	83
5.7. Zderzenia sprężyste i niesprężyste kul	85
5.8. Zasady zachowania cząstek dla elementarnych	89
5.9. Wzmianka o ogólnej teorii względności Zadania do rozdziału	94
5.10 Zadania do rozdziału 5	98
6. UKŁADY BARDZO WIELU CZĄSTEK	100
6.1. Zarys kinetyczno – molekularnej teorii gazów	100
6.2. Podstawowe równanie kinetycznej teorii gazów	101
6.3. Równanie stanu gazu doskonałego. Gaz rzeczywisty	103
6.4. Praca i ciepło	107
6.5. Zasada ekwipartycji energii	110
6.6. Zasady termodynamiki	113
6.7. Przemiany gazu doskonałego	118
6.8. Obiegi termodynamiczne	129
6.9. Zadania do rozdziału 6	135
7. ELEKTRYCZNOŚĆ I MAGNETYZM	137
7.1. Podstawowe pojęcia analizy wektorowej. Twierdzenia teorii pola	137
7.2. Potencjał skalarny i wektorowy	144
7.3. Pole elektrostatyczne. Prawo Coulomba	144
7.4. Napięcie elektryczne	147
7.5. Pojemność elektryczna	149
7.6. Energia pola elektrostatycznego	151
7.7. Zasada superpozycji	152
7.8. Prąd elektryczny	152
7.9. Prawo Joule’a – Lenza	155
7.10. Magnetostatyka. Pole magnetyczne	157
7.11. Doświadczenie z polem magnetycznym	160
7.12. Amper absolutny	164
7.13. Indukcja własna i wzajemna	165
7.14. Drganie i fale elektromagnetyczne	166
7.15. Równania Maxwella	167
7.16. Zadania do rozdziału 7	169
8. PRZEDMIOT BADAŃ FIZYKI KWANTOWEJ	172
8.1. Promieniowanie ciała doskonale czarnego	172
8.2. Zjawisko fotoelektryczne	174
8.3. Dualizm korpuskularno – falowy	177
8.4. Zjawisko Comptona	178
8.5. Promieniowanie hamowania	179
8.6. Krecja i anihilacja par	180

8.7. Fala de Broglie'a	181
8.8. Paczki falowe. Prędkość falowa i grupowa	183
8.9. Budowa atomu. Przegląd niektórych wyników fizyki klasycznej i fizyki kwantowej	185
8.9.1. Rys historyczny	185
8.9.2. Model planetarny Rutheforda	185
8.9.3. Postulaty Bohra. Model Bohra	186
8.9.4. Widmo wodoru	187
8.9.5. Atom wodoru w teorii Bohra	187
8.9.6. Kwantowanie przestrzenne. Liczby kwantowe	188
8.10. Zadania do rozdziału 8	191
9. ELEMENTY FIZYKI JĄDROWEJ	193
9.1. Podstawowe własności jąder atomowych	193
9.2. Siły jądrowe. Modele jądrowe	197
9.3. Przemiany promieniotwórcze. Prawa przemian promieniotwórczych	199
9.4. Podstawowe detektory promieniowania	202
9.5. Własności przemian alfa, beta i gamma	204
9.6. Akceleratory liniowe i orbitalne	208
9.7. Promieniotwórczość sztuczna	211
9.8. Rozszczepianie i synteza jąder	213
9.9. Zadania do rozdziału 9	215
10. ODPOWIEDZI DO ZADAŃ	217
LITERATURA	229
ANEKS 1	
Niektóre często spotykane jednostki fizyczne	230
ANEKS 2	
Uniwersalne stałe fizyczne	231
ANEKS 3	
Reguły obliczania niektórych pochodnych i całek	232

PRZEDMOWA DO WYDANIA IV

Podręcznik „**Fizyka dla studentów kierunków technicznych**” adresowany jest dla studentów Wydziału Technicznego Kujawskiej Szkoły Wyższej we Włocławku i jej filii Wydziału Mechanicznego w Grudziądzu. Studenci tych wydziałów studiują systemem zaocznym. Liczba godzin przeznaczona na przedmiot „Fizyka” jest zgodnie z programem studiów zaocznych dwukrotnie mniejsza niż liczba godzin przeznaczona dla studentów dziennych. Istniejące skrypty i podręczniki dotyczące treści programu fizyki w Uniwersytetach są bardzo obszerne i stąd wydanie podręcznika w formie bardzo skondensowanej jest usprawiedliwione.

Przedmiot Fizyka znajduje się wg obowiązującej siatki godzin w I, II i III (Termodynamika) semestrze studiów w ilości 18 godzin wykładów i 18 godzin ćwiczeń audytoryjnych na kierunkach Budownictwo, Transport i Logistyka na Wydziale Nauk Technicznych oraz na kierunkach inżynierii mechanicznej i inżynierii techniczno-informatycznej na Wydziale Mechanicznym.

Takie umiejscowienie przedmiotu fizyki ma na celu wykorzystanie wykładów, ćwiczeń rachunkowych i laboratorium jako podstawowej bazy dla innych przedmiotów, a w szczególności „Mechaniki technicznej”, „Elektrotechniki”, „Maszynoznawstwa” i „Termodynamiki”.

Dydaktycznie, materiał programowy odpowiada współczesnym tendencjom przedstawiania zjawisk fizycznych, to jest bez podziału na tradycyjne działy i bez podziału historycznego. Takie ujęcie fizyki znane jest w Polsce po przetłumaczeniu „Feynmana wykładów z fizyki”, pięciotomowych wykładów z fizyki Uniwersytetu w Berkeley, „Fizyki ogólnej” Landaua, Achiezerza i Lifszycy oraz I tomu „Wstępu do fizyki” A.K. Wróblewskiego i J.A. Zakrzewskiego.

Podręcznik „**Fizyka dla studentów kierunków technicznych**” jest w dużym stopniu oparty o trzy wydania dwutomowych skryptów autora „Fizyka dla kierunku wychowanie techniczne” jednak o objętości prawie trzykrotnie mniejszej.

Pierwszy rozdział „**Analiza błędów pomiarowych**” służyć powinien studentom przy opracowywaniu wyników pomiarowych kursowych ćwiczeń laboratoryjnych, a także będzie pomocny w czasie pisania prac licencjackich i magisterskich. Takie przeznaczenie, jak i całkowity brak wykładów z matematycznych opracowań wyników pomiarowych dla studentów kierunków technicznych, usprawiedliwia przeznaczoną na ten cel objętość podręcznika. Rozdział ten zawiera również podstawowe wyjaśnienia dotyczące rachunku różniczkowego i całkowitego wykorzystywanego na wykładach, ćwiczeniach rachunkowych i pisania sprawozdań z przeprowadzonych ćwiczeń laboratoryjnych. W drugim rozdziale „**Przedmiot i metodologia fizyki**” omówiono rodzaje oddziaływań w fizyce oraz granice fizyki klasycznej i zasadę nieoznaczoności Heisenberga. W trzecim rozdziale zatytułowanym „**Kinematyka punktu materialnego**” wyprowadzono równania ruchów i równania rzutów wykorzystując rachunek różniczkowy i całkowity. W tym rozdziale przedstawiono elementy szczególnej teorii względności i wnioski wynikające z transformacji Lorentza. Siły tarcia, opory ruchu, zasady Newtona oraz ruch w polu grawitacyjnym, elektrycznym i magnetycznym omawiam w rozdziale czwartym zatytułowanym „**Prawa ruchu**”. W piątym rozdziale „**Zasady zachowania**” omawiam pojęcia pędu, popędu, pracy i mocy, centralne i niecentralne zderzenia sprężyste oraz zderzenia niesprężyste. Zasady zachowania dla cząstek elementarnych i założenia ogólnej teorii względności omówione są elementarnie. W rozdziale szóstym – „**Układy bardzo wielu cząstek**” , położono szczególny nacisk na hasła praca, ciepło, przemiany gazów doskonałych i zasady termodynamiki. Zagadnienia te są podstawą

przedmiotu „Termodynamika”. Równania Maxwella oraz niektóre wnioski wynikające z rozwiązań tych równań są podstawą rozdziału „**Elektryczność i Magnetyzm**” (rozdział siódmy). Wiele zagadnień poruszonych w tym rozdziale bardzo pobieżnie, pogłębią studenci w dalszym toku studiów na innych przedmiotach. W rozdziale ósmym – „**Przedmiot badań fizyki kwantowej**” zaakcentowano dualizm korpuskularno-falowy promieniowania. Ze względu na szczupłość wykładu, ograniczono się jedynie do przedstawienia postulatów mechaniki kwantowej i jej elementarnych wyników. Podstawą rozdziału dziewiątego – „**Elementy fizyki jądrowej**”, stanowią podstawowe własności jąder atomowych oraz probabilistyczny charakter przemian promieniotwórczych. Po każdym rozdziale zamieszczono pewną ilość zadań, które mogą być wykorzystywane na ćwiczeniach audytoryjnych. Przeznaczona na ćwiczenia mała ilość godzin uniemożliwi rozwiązanie wszystkich zadań, jednakże ich ilość stanowi zdaniem autora niezbędne minimum, mogące być podstawą do zaliczenia ćwiczeń. Odpowiedzi i ewentualne wskazówki zamieszczono na końcu podręcznika – rozdział dziesiąty – „**Odpowiedzi do zadań**” . Na końcu podręcznika zamieszczono literaturę i trzy aneksy.

1. ANALIZA BŁĘDÓW POMIAROWYCH

1.1. Wielkości fizyczne. Jednostki układu SI

Każdą mierzalną własność zjawiska lub ciała nazywamy wielkością fizyczną. Obecnie przyjmujemy siedem podstawowych oraz dwie uzupełniające wielkości tworzące legalne jednostki miar – jednostki Międzynarodowego Układu Jednostek – układ SI. Międzynarodowy Układ Jednostek jest to systematycznie uporządkowany zbiór zawierający:

1° jednostki SI

2° wielokrotności i podwielokrotności jednostek SI wyrażone za pomocą przedrostków SI

Jednostki SI wielkości elektrycznych i magnetycznych są określone w oparciu o zracjonalizowaną postać równań pola elektromagnetycznego i przy założeniu, że stała magnetyczna (przenikalność magnetyczna próżni) $\mu_0 = 4 \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$.

Jednostki miar, inne niż legalne, mogą być stosowane tylko wyjątkowo :

- w pracach naukowych, naukowo-badawczych i doświadczalnych,
- do celów związanych z obronnością kraju,
- do celów związanych z handlem zagranicznym.

Ścisłe definicje podstawowych jednostek Międzynarodowego Układu Jednostek Miar SI są następujące :

- metr jest to długość równa 1 650 763,73 długości fali w próżni, promieniowania odpowiadającego przejściu między poziomami $2p_{10}$ a $5d_5$ ^{86}Kr (kryptonu 86),
- kilogram jest to masa międzynarodowego wzorca tej jednostki masy przechowywanego w Międzynarodowym Biurze Miar w Sevres,
-
- sekunda jest to czas równy 9 192 631 770 okresów promieniowania odpowiadającego przejściu między dwoma nadsubtelnymi poziomami podstawowego atomu ^{133}Cs (cezu 133),
-
- amper jest to prąd elektryczny nie zmieniający się, który płynąc w dwóch równoległych prostoliniowych, nieskończenie długich przewodach o przekroju kołowym znikomo małym, umieszczonych w próżni w odległości 1m (metr) od siebie – wywołałby między tymi przewodami siłę $2 \cdot 10^{-7}$ N (niutona) na każdy metr długości,
- kelwin jest to $\frac{1}{273,16}$ temperatury termodynamicznej punktu potrójnego wody,
-
- mol jest to liczność materii występująca, gdy liczba cząstek jest równa liczbie atomów zawartych w masie 0,012 kg (kilograma) ^{12}C węgla,
-
- kandela jest to światłość, jaką ma w kierunku prostopadłym powierzchnia $\frac{1}{600000 m^2}$ (metra kwadratowego) promiennika zupełnego w temperaturze krzepnięcia platyny pod ciśnieniem 101 325 Pa (paskali).

Jednostki uzupełniające układu SI są zdefiniowane następująco :

- radian jest to kąt płaski, zawarty między dwoma promieniami koła, wycinającymi z jego okręgu łuk o długości równej promieniowi tego koła (symbolem jednostki jest 1 rad),
- steradian jest to kąt bryłowy o wierzchołku w środku kuli, wycinający z jej powierzchni część równą powierzchni kwadratu o boku równym promieniowi tej kuli (symbolem jednostki jest 1 sr).

W układzie SI, poza podstawowymi jednostkami i pochodnymi można stosować jednostki wielokrotne i podwielokrotne.

Rozporządzeniem Rady Ministrów z 17 X 1975r. w sprawie ustalenia legalnych jednostek miar (Dz. U. Nr 35, poz. 192) zezwala się na używanie jednostek miar nie należących do układu SI:

- jednostka masy : tona (t),
- jednostka czasu : minuta (min), godzina (h), doba (d), dzień, tydzień, miesiąc, kwartał, rok,
- jednostka powierzchni : hektar (ha),
- jednostka objętości : litr (l),
- jednostka temperatury : stopień Celsjusza ($^{\circ}\text{C}$),
- kąt płaski : stopień ($^{\circ}$), minuta ($'$), sekunda ($''$), grad ($^{\circ}$),
- jednostka energii : elektronowolt (eV),
- jednostka masy atomowej : (u),
- jednostka długości : jednostka astronomiczna długości (AU), parsek (pc)

Zezwala się również na stosowanie tzw. „pochodnych mieszanych” układu SI np. wielkość prędkości liniowej można wyrazić w kilometrach na godzinę ($\frac{km}{h}$), energię w kilowatogodzinach ($kW \cdot h$), ładunek elektryczny w amperogodzinach ($A \cdot h$), stosunek dwóch wartości tej samej wielkości w procentach (%) lub promilach (‰).

Natomiast używane między innymi takie jednostki, jak jednostki długości 1 Å, 1 cal = 1 in = 1'', jednostki masy 1q, siły 1kG, 1 dyna, ciśnienia 1 at, 1mm Hg = 1 Tr, energia 1 cal, mocy 1KM oraz inne, opublikowane przez J.W. Szamotulskiego „Legalne jednostki miar. Wprowadzenie jednostek SI”. Wydawnictwa normalizacyjne Warszawa 1978, są dopuszczone przejściowo do stosowania i przeznaczono je do wycofania z użycia.

1.2. Błędy pomiarów fizycznych

Pomiar jest jedynym źródłem ilościowej informacji o otaczającym nas świecie i zachodzącym w nim zjawiskach, jest elementem warunkującym postęp i rozwój cywilizacji na przestrzeni całej historii.

Istotą pomiaru jest porównanie stanu pewnego zjawiska lub ciała, ze stanem przyjętym umownie za jednostkowy.

Wszystkie pomiary fizyczne dzielimy na bezpośrednie i pośrednie. Pomiary bezpośrednie polegają na porównywaniu danej wielkości z odpowiednią miarą wzorcową. Pomiarami bezpośrednimi jest pomiar prądu wykonany amperomierzem, pomiar siły – dynamometrem itp.

Aby wyznaczyć pęd ciała $p = m \cdot v$ musimy wyznaczyć kilka wielkości; masę ciała (m), jego prędkość (v). Ta ostatnia wielkość wymaga bezpośrednich pomiarów : czasu (t), w którym to ciało o masie m przebyło drogę s oraz tej drogi. Pomiary, które nie dają bezpośrednio wyniku interesującej nas wielkości fizycznej, ale można je wyznaczyć ze znanych zależności matematycznych, nazywamy pomiarami pośrednimi.

Błędy przypadkowe popełniamy zawsze. Mierząc z dostateczną dokładnością nigdy nie otrzymamy identycznego wyniku już przy dwóch pomiarach, wykonanych jednakowo starannie, tą samą aparaturą pomiarową, wyłączając oczywiście przypadkową zbieżność. Tym samym wyznaczona wartość pomiarowa ma cechy probabilistyczne. Można jedynie określić przedział, w którym z dużym prawdopodobieństwem jest zawarta prawdziwa wartość liczbowa. Oprócz analizy pomiarów wielkości fizycznej należy zawsze ocenić ich dokładność. Wynik pomiaru wielkości fizycznej, nie zawierający wraz z wynikiem oceny jego dokładności, jest bezwartościowy!

1.3. Błąd bezwzględny i względny

Niech x będzie prawdziwą wartością mierzoną, x_i jej wartością mierzoną dla i -tego pomiaru. Jeśli przyjmiemy zamiast x wartość x_i , to popełnimy błąd bezwzględny absolutny

$$\Delta x = |x_i - x|$$

Im błąd absolutny Δx jest mniejszy, tym dokładniejsza jest wartość mierzona x_i . W praktyce błąd bezwzględny odnosimy zazwyczaj do \bar{x} , przyjmując tę wielkość jako przybliżoną wartość prawdziwej wielkości mierzonej x . Powyższy wzór przyjmie więc postać:

$$\Delta x = |x_i - \bar{x}| \quad (1)$$

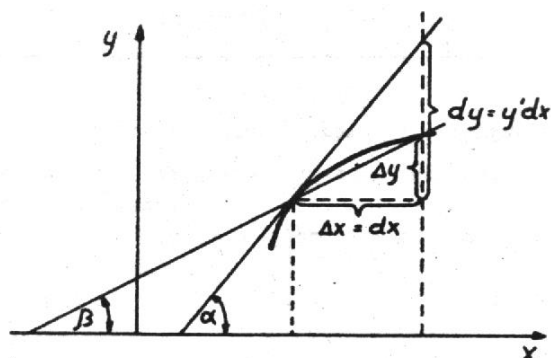
Błędem względnym nazywamy wyrażenie

$$\frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Wykonując działania arytmetyczne na wielkościach mierzonych, a więc przybliżonych, popełniamy zarówno błąd bezwzględny, jak i względny. Z uwagi na fakt, że nigdy nie wiemy, czy dany pomiar wykonano z nadmiarem czy z niedomiarem, to można mówić jedynie o maksymalnym błędzie względnym oraz o maksymalnym błędzie bezwzględnym (błędy kumulują się, a nie redukują).

Jeśli znamy postać funkcyjną mierzonej wielkości, wówczas błędy bezwzględne i względne obliczamy metodami rachunku różniczkowego. Z interpretacji geometrycznej pochodnej funkcji – Rys.1 wynika, że dla małych przyrostów $\Delta x = dx$, przyrost funkcji Δy może być w przybliżeniu równy różniczce funkcji $dy = y' dx$

$$\Delta y \approx y' dx \approx dy \quad (2)$$



Rys.1. Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji: $y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$

Wykaz pochodnych funkcji jednej zmiennej, reguły obliczania pochodnych oraz tabele całek nieoznaczonych występujących w podręczniku przedstawiono w Aneksie 3.

Błędy bezwzględne (względne) wyznaczamy:

1° metodą pochodnej logarytmicznej (gdy daną postać funkcyjną można logarytmować)

2° metodą różniczki zupełnej (w dowolnym przypadku)

Jeżeli wielkość z można przedstawić wzorem

$$z = Ax_1^a x_2^b \dots x_n^s$$

wówczas maksymalny błąd bezwzględny obliczony metodą pochodnej logarytmicznej wynosi

$$\ln z = \ln A + a \ln x_1 + b \ln x_2 + \dots + s \ln x_n$$

po zróżniczkowaniu i po uwzględnieniu (2), mamy

$$\Delta z = z \left(a \frac{\Delta x_1}{x_1} + b \frac{\Delta x_2}{x_2} + \dots + s \frac{\Delta x_n}{x_n} \right) \quad (3)$$

W przypadku ogólnym, gdy wielkości mierzonej pośrednio $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nie możemy przedstawić bardziej szczegółowym wzorem, wówczas błąd bezwzględny obliczamy wzorem

$$dz = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| dx_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| dx_2 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| dx_n \quad (4)$$

Wyrażenie (4) nazywamy różniczką zupełną funkcji $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

a po uwzględnieniu (2)

$$\Delta z = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \Delta x_n \quad (5)$$

1.4. Średnie klasyczne

W wielu praktycznych zagadnieniach pomiaru nieznannej wielkości x utarło się przekonanie, że najlepszą wartością spośród n zmiennych rezultatów stanowi średnia arytmetyczna. W rachunku prawdopodobieństwa istnieją odpowiednie twierdzenia i metody (np. metoda największej wiarygodności) uzasadniające to postępowanie. Przyjęcie średniej arytmetycznej za najlepsze przybliżenie rzeczywistej wartości mierzonej, jest przyjęciem modelu:

Model I. Zmierzono n razy jednakowo starannie tym samym narzędziem i tą samą metodą tę samą wielkość i otrzymano liczby dodatnie x_1, x_2, \dots, x_n . Znaleźć taką liczbę \bar{x} , aby suma kwadratów odchyleń liczb x_1, x_2, \dots, x_n od \bar{x} była minimalna.

Oznaczmy tę funkcję $f(\bar{x})$, więc

$$f(\bar{x}) = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 = \text{minimum}$$

Zróżniczkujemy tę funkcję względem \bar{x} i przyrównajmy do zera

$$f'(\bar{x}) = -2(x_1 - \bar{x}) - 2(x_2 - \bar{x}) - \dots - 2(x_n - \bar{x}) = 0 \quad (6)$$

Po opuszczeniu nawiasów i uproszczeniu otrzymujemy

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (7)$$

Jeżeli obliczymy drugą pochodną wyrażenia (6), to dla obliczonej wartości \bar{x} (7) otrzymamy

$$f''(\bar{x}) = 2 + 2 + \dots + 2 = 2n > 0$$

a więc udowodniliśmy spełnienie postulatu o minimum.

Przyjęte założenia, że nie wszystkie obserwacje wykonano z taką samą starannością lub pewne pomiary powtarzają się częściej od innych, to przyjęcie powyższego założenia prowadzi do otrzymania wzoru na tzw. średnią ważoną

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i n_i}{n} \quad (8)$$

gdzie n_i dla $i=1,2,\dots,n$ oznacza ustaloną przez obserwatora wagę występowania pomiaru x_i (bardzo często jest przyjmowana za wagę częstości występowania pomiaru x_i).

Dokonujący opracowywania wyników pomiarów może przyjąć inne założenia odnośnie średniej, np. :

Model II. Zmierzono n razy jednakowo starannie tym samym narzędziem i tą samą metodą tę samą wielkość i otrzymano liczby dodatnie x_1, x_2, \dots, x_n . Znaleźć taką liczbę \bar{x}_n , aby suma kwadratów odwrotności liczb $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$ od odwrotności liczby $\frac{1}{\bar{x}_n}$ była minimalna.

Funkcja ta ma postać

$$f(\bar{x}_n) = \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{\bar{x}_n}\right)^2 + \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{\bar{x}_n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{\bar{x}_n}\right)^2 = \text{minimum}$$

a rozwiązaniem jest

$$\bar{x}_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \quad (9)$$

Inną średnią klasyczną używaną w statyce jest średnia geometryczna:

Model III. Zmierzono n razy jednakowo starannie tym samym narzędziem i tą samą metodą tę samą wielkość i otrzymano liczby dodatnie x_1, x_2, \dots, x_n . Znaleźć taką liczbę \bar{x}_g , aby suma kwadratów odchyleń logarytmów naturalnych $\ln x_1, \ln x_2, \dots, \ln x_n$ od $\ln \bar{x}_g$ była minimum.

Rozwiązaniem funkcji

$$f(\bar{x}_g) = (\ln x_1 - \ln \bar{x}_g)^2 + (\ln x_2 - \ln \bar{x}_g)^2 + \dots + (\ln x_n - \ln \bar{x}_g)^2 = \text{minimum}$$

jest
$$\bar{x}_g = \sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \quad (10)$$

Średnie klasyczne, jako wypadkowe wszystkich wartości mierzonej cechy, mają charakter abstrakcyjny. Często tych wartości w zbiorowości nie ma lub są nawet wykluczone np. 1.3 osoby na pomieszczenie mieszkalne. Jeżeli jeden pomiar bardzo odbiega od pozostałych, to obliczenia wartości średniej (potocznie termin „średnia” oznacza średnią arytmetyczną) może błędnie informować o wartościach pomiarów, np. wartość średniej arytmetycznej $\bar{x}=4$ otrzymanej na podstawie czterech pomiarów (1,2,3,10) lub (1,1,1,13) bardzo źle opisuje zbiór.

Wyniki „odbiegające” w powyższych przykładach, to 10 i 13, przy czym wybór ich jest oczywiście subiektywny. W statystyce matematycznej istnieją obiektywne metody ustalające, które pomiary „odbiegają”, które pomiary należy odrzucić, a które należy przyjąć do dalszej obróbki statystycznej.

Jeśli dane liczbowe pogrupowane są w pewne przedziały klasowe o szerokości h (w tych przypadkach tracimy część informacji, gdyż każda jednostka traci swą „indywidualność”), wówczas obliczenie średnich klasycznych jest możliwe, gdy przyjmiemy środki przedziałów klasowych za wartości pomiarów. Liczbę przedziałów klasowych oraz ich szerokość określają pewne reguły, np. wg M. Sztarskiego, liczbę przedziałów klasowych określa wzór

$$k = 1 + 3.3 \log N$$

N - oznacza ilość obserwacji

a szerokość przedziałów klasowych obliczamy z zależności

$$h = \frac{R}{k} \quad \text{gdzie } R = X_{\max} - X_{\min}$$

Rozstęp R jest różnicą pomiędzy maksymalną i minimalną wartością badanej cechy.

Jeśli dany szereg rozdzielczy ma otwarte przedziały klasowe, a w nich znajdują się znaczące ilości obserwacji, wówczas obliczenie średnich klasycznych jest niemożliwe. W tym przypadku można obliczać (wyznaczać) tzw. średnie pozycyjne.

1.5. Miary rozproszenia

Oprócz średnich klasycznych lub średnich pozycyjnych, równie ważnymi wielkościami charakteryzującymi próbkę, czy też całą zbiorowość (populację generalną) są miary rozrzutu. Właśnie one stanowią o dokładności pomiarów, bez których każdy wynik jest bezwartościowy.

Istnieje kilka miar rozrzutu. Do najczęściej obliczanych klasycznych miar rozrzutu (dyspersji) należą: odchylenie przeciętne d – (wzór 11), wariacja s^2 lub odchylenie standardowe s (wzór 12), względnie \hat{s} (wzór 13).

$$d = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}| n_i}{n} \quad (11)$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n} = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \quad (12)$$

powyższy wzór stosujemy gdy $n \geq 30$ (duża próba), a dla szeregów rozdzielczych

$$s^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 - \frac{1}{12} h^2$$

$$\hat{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n-1} \quad \text{dla } n < 30 \text{ (mała próba)} \quad (13)$$

1.6. Przedziały ufności dla wartości przeciętnej m populacji generalnej

Zwykle pomiar powtarza się kilkakrotnie, a następnie obliczamy wartość średnią. Otrzymana średnia arytmetyczna \bar{x} jest wartością przeciętną próbki. Przy jej pomocy można oszacować metodą przedziałową, dla przyjętego poziomu ufności oraz znanej wartości odchylenia standardowego populacji generalnej σ wartość przeciętną m populacji generalnej. Metodę przedziałową stosuje się do rozkładów normalnych (zbliżonych do normalnych), a jej wyniki interpretujemy następująco: w 95 przypadkach na 100 (przyjęty poziom ufności wynosi 0.95) nieznaną wartość parametru m populacji generalnej, uzyskany na podstawie \bar{x} i s w próbce, zawiera w granicach od ... do. Dla próbek liczących 30 i więcej elementów przyjmuje się, że odchylenie standardowe w próbce s (wzór 12) jest w przybliżeniu równe σ , natomiast dla próbek małych $n < 30$, przedziały ufności budujemy w oparciu o rozkład t-Studenta

$$\bar{x} - t_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n-1}} < m < \bar{x} + t_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n-1}} \quad (14)$$

przy czym współczynnik t_{α} znajdujemy z Tabeli t-Studenta dla liczby stopni swobody $k=n-1$ i przyjętego poziomu ufności. Współczynniki t_{α} dla $k=\infty$ odpowiadają współczynnikom liczbowym dla rozkładu normalnego. Oznacza to, że rozkład t-Studenta dla $k>30$ jest bardzo zbliżony do rozkładu normalnego.

Współczynniki t_{α} rozkładu t – Studenta

Liczba stopni swobody $k = n - 1$	Poziomy ufności		
	0.9	0.95	0.99
1	6.31	12.71	63.66
2	2.92	4.30	9.93
3	2.35	3.18	5.84
4	2.13	2.78	4.60
5	2.02	2.57	4.03
6	1.94	2.45	3.71
7	1.90	2.37	3.50
8	1.86	2.31	3.36
9	1.83	2.26	3.25
10	1.81	2.23	3.17
11	1.80	2.20	3.11
12	1.78	2.18	3.06
13	1.77	2.16	3.01
14	1.76	2.15	2.98
15	1.75	2.13	2.95
16	1.75	2.12	2.92
17	1.74	2.11	2.90
18	1.73	2.10	2.88
19	1.73	2.09	2.86
20	1.73	2.09	2.85
21	1.72	2.08	2.83
22	1.72	2.07	2.82
23	1.71	2.07	2.81
24	1.71	2.06	2.80
25	1.71	2.06	2.79
26	1.71	2.06	2.78
27	1.70	2.05	2.77
28	1.70	2.05	2.76
29	1.70	2.05	2.76
30	1.70	2.04	2.75
0	1.68	2.02	2.70
60	1.67	2.00	2.66
120	1.66	1.98	2.62
∞	1.645	1.960	2.76

1.7. Porównanie zbiorów

Jeśli mamy do czynienia z dwoma zbiorami, w których mierzona jest ta sama cecha, to dla stwierdzenia, czy istnieje dla danego poziomu istotności ($\alpha=1 - \text{poziom ufności}$) zasadnicza różnica między ich średnimi arytmetycznymi $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$, należy porównać obliczone wg poniższych wzorów u (duża próba) lub t (mała próba) i porównać je z tabelarycznymi danymi u_α , i t_α .

$$u = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \quad (15)$$

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \quad (16)$$

Zwykle przyjmujemy się poziom istotności $\alpha=0.10$, $\alpha=0.05$, $\alpha=0.01$. Tabelarycznie u_α , i t_α dla powyższych poziomów istotności znajduje się w t-Studenta: dla dużych próbek współczynniki te odczytujemy dla $k=\infty$ stopni swobody, dla małych próbek $k=n-1$ stopni swobody.

Jeśli $|u| \leq |u_\alpha|$

lub

$$|t| \leq |t_\alpha|$$

to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności średnich \bar{x}_1 i \bar{x}_2 .

Jeśli $|u| > |u_\alpha|$

lub $|t| > |t_\alpha|$

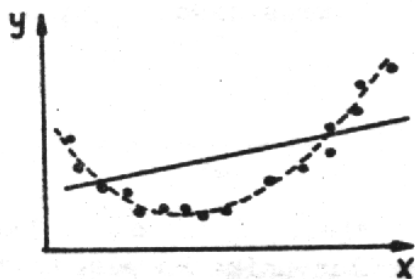
to hipotezę o zgodności średnich \bar{x}_1 i \bar{x}_2 odrzucamy.

1.8. Korelacja i regresja liniowa

Wielkość
$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n s_x s_y} \quad (15)$$

nazywana jest współczynnikiem korelacji (liniowej) Pearsona.

Współczynnik korelacji r jest jedną z najczęściej stosowanych i najbardziej nadużywanych miar statystycznych. Jest on nadużywany w tym sensie, że często pomija się fakt, iż r mierzy tylko siłę zależności liniowej, i że niekoniecznie świadczy o istnieniu zależności przyczynowej. Np. na Rys.2. przedstawiono dość dobre dopasowanie krzywej do empirycznych punktów, a tymczasem wartość współczynnika r obliczona wzorem (15) jest bliskie zeru, co świadczyłoby o tym, że obie zmienne nie są ze sobą powiązane.

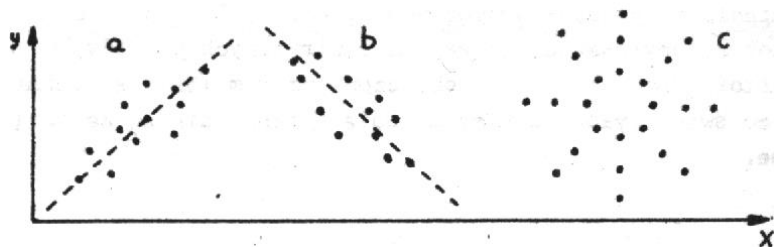


Rys.2. Zależność nieliniowa

Wysoka wartość współczynnika korelacji r nie świadczy zawsze o istnieniu zależności przyczynowej, może być spowodowana czystym przypadkiem. Przypadkowość wysokiej korelacji z próby musi być weryfikowana odpowiednimi testami dotyczącymi oszacowania tzw. współczynnika korelacji populacji generalnej, oznaczanej w literaturze literą ρ .

Oczywiście wysoki współczynnik korelacji z próby r może wykrywać przyczynowość między dwiema cechami.

Współczynnik korelacji r Pearsona definiujemy jako miarę zgodności dopasowania prostej wyprowadzonej metodą najmniejszych kwadratów do zbioru par danych. O korelacji między dwiema cechami tego samego zbioru mówimy wówczas, gdy na wykresie x , y empiryczne punkty leżą bardzo blisko pewnej krzywej (mówimy wówczas o zależności statystycznej) lub leżą dokładnie na niej (zależność funkcyjna) – Rys.3



Rys.3. Wykres korelacyjny
a) korelacja dodatnia
b) korelacja ujemna
c) brak korelacji

Średnie błędy współczynnika korelacji r obliczamy wzorem

$$\text{dla dużych próbek} \quad \varepsilon_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n}} \quad (16)$$

$$\text{dla małych próbek} \quad \varepsilon_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} \quad (17)$$

Wartości współczynnika korelacji r należą do przedziału domkniętego $\langle -1, 1 \rangle$.
Otrzymane wartości r interpretujemy następująco:

$r = 1$	korelacja zupełnie ścisła, dodatnia, wzrostowi jednej cechy odpowiada liniowy wzrost drugiej cechy
$0.7 < r < 1.0$	korelacja dość duża,
$0.3 < r < 0.7$	korelacja mała,
$0 < r < 0.3$	korelacja bardzo mała,
$r = 0$	brak korelacji,
$r = -1$	korelacja zupełnie ścisła, ujemna, wzrostowi jednej cechy odpowiada liniowy spadek drugiej cechy

Poniższe równania umożliwiają prognozowanie najbardziej prawdopodobnej wartości cechy y dla danej wartości cechy x – równanie (18) lub odwrotnie – równanie (19).

$$y - \bar{y} = r \frac{s_y}{s_x} (x - \bar{x}) \quad (18)$$

$$x - \bar{x} = r \frac{s_x}{s_y} (y - \bar{y}) \quad (19)$$

czyli współczynnik a i b „najlepszej” prostej $y = ax + b$ wyprowadzonej metodą najmniejszych kwadratów zbioru par danych mają postać:

$$a = r \frac{s_y}{s_x}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x} \quad (20)$$

1.9. Zadania do rozdziału 1

1.9.1. W celu oszacowania dokładności pewnego przyrządu pomiarowego dokonano nim 10 niezależnych pomiarów długości pewnego odcinka i otrzymano następujące wyniki w mm: 15.15, 15.20, 15.04, 15.14, 15.22, 15.05, 15.26, 15.13, 15.17. Przyjmując współczynnik ufności 0.99 zbudować przedział ufności dla nieznannej wartości długości.

1.9.2. Dokonano pomiarów odchylen od normy nominalnej średnicy dla 150 wylosowanych wałków. Otrzymano następujący rozkład odchylen od nominalnej średnicy w mm:

Odchylenie od normalnej średnicy	Liczba wałków
0 – 5	2
5 – 10	10
10 – 15	25
15 – 20	36
20 – 25	45
25 – 30	22
30 – 35	10

Przyjmując współczynnik ufności 0.95, zbudować przedział ufności dla wartości przeciętnej odchyłeń od nominalnej średnicy wałków.

1.9.3. Wykonano 64 niezależne pomiary wartości przyspieszenia ziemskiego w pewnym punkcie i otrzymano wartość w m/s²:

Wartości pomiarów przyspieszenia ziemskiego	Liczba pomiarów
9.769	5
9.776	13
9.782	22
9.788	15
9.792	9

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że wartość przyspieszenia ziemskiego w miejscu obserwacji wynosi 9.800 m/s².

Wskazówka: Oblicz wyrażenie $u = \frac{\bar{x} - m_0}{s} \sqrt{n}$, gdzie $m_0 = 9.800$ m/s², a następnie porównaj $|u|$ z $|u_\alpha|$. Jeśli $|u| < |u_\alpha|$, to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o równości \bar{x} oraz m_0 , jeśli $|u| \geq |u_\alpha|$, to hipotezę odrzucamy.

1.9.4. Pomiary napięcia prądu uzyskane przy użyciu dwóch różnych woltomierzy dały następujące wyniki w V: Dla pierwszego woltomierza: 11.7, 11.3, 11.5, 11.5, 11.1, 11.9, 11.4, 11.8, 11.8, 12.0, dla drugiego woltomierza otrzymano: 11.9, 12.0, 11.7, 11.6, 11.9, 12.0, 12.0, 11.9, 11.2. Na poziomie istotności $\alpha=0.01$ zweryfikować hipotezę o jednakowych wynikach pomiaru napięcia obu woltomierzy.

1.9.5. Jeżeli populacja generalna ma rozkład normalny lub zbliżony do normalnego, to niezbędną liczbę pomiarów do próby na danym poziomie ufności szacujemy wzorami:

$$n = \frac{u^2 s^2}{d^2} \quad \text{lub} \quad n = \frac{t^2 \hat{s}^2}{d^2}$$

gdzie d jest maksymalnym błędem szacunku średniej (połową długości przedziału ufności).

Ile niezależnych pomiarów należy wykonać, aby oszacować z błędem maksymalnym 0.1°K średnią temperaturę, jeżeli wstępna próba 11 pomiarów dała następujące wyniki w stopniach: 280.3, 280.4, 280.3, 280.5, 280.2, 280.8, 280.2, 280.8, 280.3, 281.0, 280.9 ? Przyjąć współczynnik ufności 0.95.

1.9.6. Dwa autobusy wyruszyły jednocześnie z punktu A do punktu B. Jeden z nich pierwszą połowę drogi przebył ze stałą prędkością v_1 , a drugą połowę drogi – ze stałą prędkością v_2 . Drugi autobus porusza się z prędkością v_1 przez połowę czasu jazdy na drodze od A do B, a drugą połowę czasu z prędkością v_2 . Wyznaczyć średnią prędkość ruchu każdego autobusu, jeżeli $v_1 = 30 \text{ km/h}$ i $v_2 = 50 \text{ km/h}$.

1.9.7. Pomiary gęstości bryły uzyskane przez dwa zespoły dały następujące wyniki:

$$\rho_1 = (4.5 \pm 0.7) \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}; \quad \rho_2 = (5.22 \pm 0.04) \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

Czy ich wyniki są zgodne ?

1.9.8. Czy wartość przyspieszenia ziemskiego uzyskana metodą obserwacji wahań wahadła matematycznego $g = (10.01 \pm 0.23) \text{ m/s}^2$ jest zgodna z wartością podaną przez tablice fizyczne dla Torunia?

$g_{\text{Toruń}} = 9.81334 \text{ m/s}^2$. W tablicach fizycznych nie podano dokładności powyższego rezultatu, więc maksymalna niedokładność wynosi $\pm 0.00010 \text{ m/s}^2$

1.9.9. Dokonano w pewnej miejscowości pomiarów temperatury dla różnych głębokości pod powierzchnią ziemi. Otrzymano następujące wyniki x_i (głębokość) w m, y_i (temperatura) w stopniach K:

x_i	200	400	600	800	1000	1200	1400
y_i	283	288	296	299	306	310	320

Oblicz współczynnik korelacji r Pearsona dla powyższych par danych. Jaka jest temperatura na głębokości 500 m ?

1.9.10. Wyznacz metodą pochodnej logarytmicznej oraz metodą różniczki zupełnej błąd wyznaczenia długości wahadła sekundowego matematycznego w miejscu, gdzie $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

Przyjąć dane: $\Delta T = 0.01 \text{ s}$, $\Delta g = 0.001 \text{ m/s}^2$.

1.9.11. Oblicz metodą różniczki zupełnej i pochodnej logarytmicznej błąd bezwzględny i względny wyznaczenia gęstości masy właściwej ciała, jeśli: $m = 27 \text{ g}$, $\Delta m = 0.1 \text{ g}$, $V = 10 \text{ cm}^3$, $\Delta V = 0.001 \text{ cm}^3$.

1.9.12. Obliczyć całkowity R oporników $R_1 = 20 \Omega$ i $R_2 = 10 \Omega$ połączonych szeregowo lub równolegle. Wyznacz błąd bezwzględny oraz błąd względny oporu całkowitego przyjmując, że $\Delta R_1 = \Delta R_2 = 0.1 \Omega$.

2. PRZEDMIOT I METODOLOGIA FIZYKI

2.1. Metody badań fizycznych. Modele matematyczne

Odpowiedź na pytanie „czym jest fizyka?” wcale nie jest prosta. Stwierdzenie, że jest ona podstawową nauką przyrodniczą, której celem jest badanie najbardziej podstawowych i uniwersalnych właściwości materii i zjawisk w otaczającym nas świecie, jest niepełne. Również odpowiedź, że fizyka jest nauką której celem jest badanie elementarnych składników materii i ich oddziaływań fundamentalnych, nie jest wyczerpująca.

Charakterystyczną cechą rozwoju fizyki w procesie poznania świata jest proces syntezy, tj. znajdowania związków między poszczególnymi zjawiskami, często na pierwszy rzut oka zupełnie od siebie niezależnymi.

Pierwsza taka synteza nastąpiła w 1687 roku, gdy Izaak Newton w „Principiach” sformułował podstawowe zasady swojej mechaniki. Teoria Newtona objęła tak, zdawałoby się, różne zjawiska jak ruch planet, spadanie ciał, ruch wahadła itp. Proste obserwacje Hansa Oersteda w 1820 roku, że prąd elektryczny oddziałuje na igłę magnetyczną, doprowadziło do syntezy nauki o elektryczności i nauki o magnetyzmie, które od starożytności rozwijały się niezależnie od siebie. W roku 1864 James Clerk Maxwell, dzięki pracom Ampere’a, Faradaya i innych, dokonał kolejnej syntezy, stwarzając jednolitą teorię zjawisk elektromagnetycznych, obejmującą zjawiska elektryczne, magnetyczne i optyczne. Dzięki pracom Boltzmanna, Clausiusa i Maxwella powstała fizyka statystyczna – kolejna synteza nauk o ciepłe i mechaniki.

Mechanika Newtona, elektrodynamika Maxwella i fizyka statystyczna stanowiły trzy filary tzw. fizyki klasycznej, o której sądzono w XIX w, że skoro może ona, opierając się na niewielu prawach, wyjaśnić niemal wszystkie obserwowane wówczas zjawiska, to jest nauką skończoną, doskonałą i zamkniętą.

Odkrycie Hertza (zjawisko fotoelektryczne), Roentgena (promieniowanie X), Becquerela (promieniotwórczość), badania małżonków Curie, Rutherforda, Soddy’ego nad ciałami promieniotwórczymi zmusiły fizyków już w pierwszych latach naszego stulecia do zrewidowania powyższego poglądu. Do największych osiągnięć XXw. należy teoria względności Einsteina, szczególnie teoria względności STW i ogólna teoria względności OTW – będąca, zdaniem niektórych fizyków, ukoronowaniem fizyki klasycznej.

Stworzona w latach dwudziestych przez Borna, Bohra, de Broglie’a, Diraca, Heisnberga, Schroedingera i innych mechanika kwantowa spowodowała kolejną syntezę; chemia jako nauka teoretyczna stała się działem fizyki. Mechanika kwantowa zerwała z determinizmem fizyki klasycznej, odkrywając falowe właściwości elektronu i innych cząstek elementarnych. Mechanika kwantowa pozwoliła zrozumieć budowę atomów, cząsteczek, sprowadzając istotę wiązań chemicznych i procesy chemiczne do kwantowych oddziaływań elektromagnetycznych elektronów.

Dzięki rozwojowi fizyki jądrowej, udało się wskazać źródło energii gwiazd i tym samym astronomia (astrofizyka) stała się gałęzią fizyki.

Najdoskonalszą obecnie teorią fizyczną jest elektrodynamika kwantowa stworzona przez Feynmana, Schwingera i Tomonagę (lata pięćdziesiąte naszego stulecia). Elektrodynamika kwantowa opisuje wszystkie obserwowane zjawiska makroskopowe (poza grawitacją). Obecnie trwają próby stworzenia teorii, która obejmowałaby poza zjawiskami elektromagnetycznymi także zjawiska wynikające z oddziaływań silnych i słabych.

„Wchłanianie” przez fizykę nauk pokrewnych nie oznacza, że przestaną być one samodzielnymi dziedzinami wiedzy. Astrofizyka jako część fizyki rozpatruje zjawiska związane z olbrzymimi masami, wysokimi temperaturami, wielkimi gęstościami i wysoką próżnią. Chemia jako dział fizyki obejmuje budowę zewnętrznych powłok elektronowych atomów i cząsteczek oraz reakcji między tymi obiektami.

Pokrewne nauki przyrodnicze rozszerzają niezmiernie zakres badań na obszary przez fizyków nie opanowane (np. problem ekspansji Wszechświata, odkrycie pulsarów i kwazarów). Najcenniejszym osiągnięciem fizyki jest stworzenie nowoczesnej metody naukowej, odkrycie i opanowanie podstaw konkretnych metod eksperymentalnych, np. wprowadzenie metod radioastronomicznych do astronomii, metody badań strukturalnych w biologii.

W fizyce przyjęło się wyróżnianie badań podstawowych (poznawczych) i badań stosowanych. Badania stosowane leżą na styku fizyki i techniki. Wielu badaczy, wyrażając pogląd o związkach fizyki i techniki, akceptuje następujące sformułowania „Fizyka jest matką techniki”. Doświadczenie uczy, że wyniki badań fizycznych prędzej czy później znajdą zawsze zastosowanie praktyczne w konstrukcjach nowych urządzeń, przyrządów pomiarowych, w nowej technologii, w uzyskiwaniu energii. Jeszcze częściej zastosowania te są opracowywane przez inżynierów i techników, którzy tworzą technikę dnia dzisiejszego natomiast fizycy – dla techniki jutra.

W Tabelach 2.1., 2.2. i 2.3. zestawiono porównawcze wielkości długości (odległości), masy i czasu. Pozwalają one zorientować się w obszarach penetracji fizyki, konieczności stosowania różnorodnej aparatury i konieczności stosowania różnych metod pomiarowych.

Tabela 2.1. Tabela porównawcza długości (odległości) w metrach

10^{27}	Rozmiary Wszechświata
10^{24}	Najbliższa Galaktyka
10^{21}	Odległość Ziemi od środka naszej Galaktyki
10^{18}	Odległość Ziemi od najbliższej gwiazdy
10^{15}	Rok świetlny
10^{12}	Rozmiary Układu Słonecznego
10^9	Odległość Ziemi od Księżyca
10^6	Wysokość lotu sztucznego satelity
10^3	Wysokość gór
10^0	Wysokość dziecka
10^{-6}	Długość fali świetlnej
10^{-12}	Promień jądra atomowego

Tabela 2.2. Tabela porównawcza mas w kilogramach

10^{54}	Masa Wszechświata
10^{42}	Masa Galaktyki
10^{30}	Masa Słońca
10^{18}	Masa planetoidy
10^6	Masa statku oceanicznego
10^0	Masa wzorca jednostkowego
10^{-12}	Masa komórki bakterii
10^{-24}	Masa cząsteczki wodoru
10^{-27}	Masa elektronu

Tabela 2.3. Tabela porównawcza czasów w sekundach

10^{18}	Wiek Wszechświata i Układu Słonecznego
10^{12}	Wiek piramid
10^9	Wiek człowieka
10^3	Średni czas życia swobodnego neutronu
10^0	Jedno uderzenie serca
10^{-3}	Okres fal głosowych
10^{-18}	Czas przejścia światła przez atom
10^{-24}	Czas przejścia światła przez jądro

W tabelach 2.4. i 2.5. zestawiono porównawcze wielkości energii i temperatury.

Tabela 2.4. Tabela porównawcza energii w dżulach

10^{41}	Wybuch supernowej
10^{33}	Promieniowanie przeciętnej gwiazdy w ciągu 1 roku
10^{21}	Energia trzęsienia ziemi
10^{18}	Wybuch bomby wodorowej
10^3	Wystrzał działa artyleryjskiego
10^{-3}	Trzepot skrzydeł muchy
10^{-11}	Energia podziału uranu
10^{-17}	Energia krążącego elektronu na orbicie atomu

Tabela 2.5. Tabela porównawcza temperatury w Kelwinach

10^{10}	Temperatura wnętrza gorących gwiazd
10^8	Epicentrum wybuchu bomby wodorowej
10^6	Temperatura słonecznej korony
10^3	Powierzchnia chłodnych gwiazd
10^2	Krzepnięcie azotu
10^0	Krzepnięcie helu
10^{-6}	Najniższa osiągnięta temperatura

W powyższych tabelach nie zaznaczono, od którego miejsca obowiązują prawa fizyki kwantowej, fizyki klasycznej, fizyki relatywistycznej i nierelatywistycznej. Prawa fizyki klasycznej w zastosowaniu do układów makroskopowych opisują tylko ich ogólne właściwości.

Na podstawie powyższych tabel można przewidzieć ruch ciała makroskopowego jako całości, ale nie można się dowiedzieć jaki jest ruch elementarnych składników tego ciała. Ten fakt wskazuje, że prawa fizyki klasycznej są tylko przybliżonymi prawami, że stanowią graniczny przypadek bardziej podstawowych i ogólniejszych praw fizyki kwantowej.

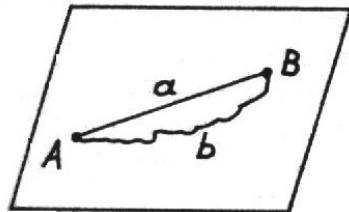
Istnieje pewna stała uniwersalna, tzw. stała Plancka ($h=6.626 \cdot 10^{-34}$ J·s) pozwalająca zdecydować, czy należy stosować prawa fizyki klasycznej, czy prawa fizyki kwantowej.

Jeśli kombinacja zmiennych dynamicznych o wymiarze działania $J \cdot s$ (przez zmienne dynamiczne rozumiemy wielkości fizyczne charakteryzujące stan ruchu, np. energia, położenie x , prędkość v_x , składowa pędu p_x itp.) jest porównywalna ze stałą Plancka to do opisu ruchu ciała należy stosować prawa mechaniki kwantowej. Jeśli wartość ta jest znacznie większa niż h , to możemy posługiwać się prawami fizyki klasycznej. Kryterium to jest oczywiście tylko przybliżeniem.

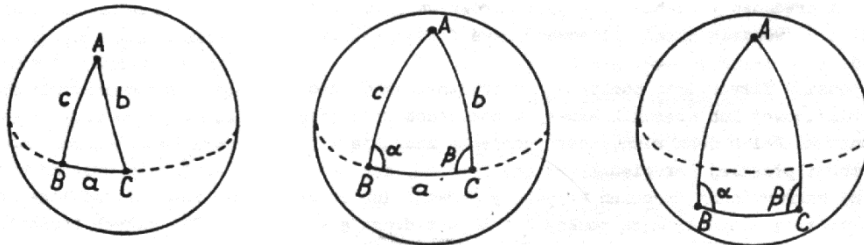
Jeśli prędkość v ruchu ciała jest porównywalna z prędkością światła c , wówczas należy stosować prawa fizyki relatywistycznej.

U podstaw fizyki leżą pomiary geometryczne. Wybór geometrii euklidesowej lub nieeuklidesowej w pomiarach odległości między punktami A i B jest różny, gdy punkty te znajdują się na powierzchni płaskiej (promień krzywizny $r = \infty$), czy na powierzchni zakrzywionej (promień krzywizny dodatni lub ujemny).

Najkrótszą drogą łączącą punkty A i B jest droga a – Rys.3., najkrótszymi liniami łączącymi punkty A, B i C są koła wielkie przechodzące przez te punkty – Rys.4. (a, b i c).



Rys.3. Najkrótszą drogą łączącą punkty A i B jest droga a.



Rys.4. Najkrótszymi liniami łączącymi punkty A, B i C są koła wielkie przechodzące przez te punkty.

Punkty A, B, C tworzą trójkąt. W przypadku (a) suma kątów wewnętrznych nieco przekracza 180° , nie można stosować dla przedstawionego trójkąta prostokątnego twierdzenia Pitagorasa. W przypadku (b) suma kątów wewnętrznych może znacznie przekraczać 180° , a w przypadku (c), suma kątów wewnętrznych może bardzo znacznie odbiegać od 180° .

Dla małych trójkątów na dwuwymiarowej powierzchni kuli odstępstwa od geometrii euklidesowej są niewielkie, dla dużych trójkątów odstępstwa są większe. Aby stwierdzić, czy nasza obserwowana przestrzeń jest płaska czy zakrzywiona, należałoby mierzyć sumę kątów wewnętrznych dużych trójkątów (wierzchołki, które tworzyłyby najodleglejsze galaktyki i Ziemia).

Dotychczasowe badania, aż do odległości rzędu 10^{26} m (tę odległość uważa się za obserwowany promień Wszechświata, względnie promień krzywizny przestrzeni), nie negują fałszywości geometrii euklidesowej, tj. suma kątów wewnętrznych wynosi w granicach błędów 180° . badania w obszarach porównywalnych z rozmiarami jądra atomowego również nie negują stosowalności geometrii euklidesowej.

Obserwacje Wszechświata potwierdzają, że nasza przestrzeń jest jednorodna i izotropowa. Oznacza to, że przestrzeń nie zmienia się od punktu do punktu, oraz że wszystkie kierunki mają te same właściwości. Oznacza to, że zachowana jest niezmienniczość względem przesunięcia (zasada ta prowadzi do zasady zachowania pędu) oraz zachowana jest niezmienniczość względem obrotu (zasada ta prowadzi do zasady zachowania momentu pędu). Jednakże fizycy obserwują lokalne zakrzywienie przestrzeni, np. światło odchyła się w pobliżu wielkich mas, będących źródłami silnych pól grawitacyjnych. Te efekty są potwierdzeniem geometrycznych przewidywań ogólnej teorii względności.

Fizyka jest nauką przyrodniczą, posługującą się w szerokim zakresie metodami matematycznymi. Bardzo ścisły związek fizyki z matematyką zapoczątkowały już w XVIII i XIX w prace I. Newtona i G.W. Leibniza dotyczące rachunku różniczkowego i całkowego, i ich powiązania z zasadami mechaniki. Wyraźnego rozgraniczenia między fizyką teoretyczną a matematyką nie można przeprowadzić, a taki dział fizyki jak mechanika można uważać za dział matematyki. Najbardziej charakterystyczną cechą fizyki jest silne powiązanie i wzajemne uzupełnienie metod matematycznych i doświadczalnych. Z braku ogólnej teorii jądra atomowego i cząsteczek elementarnych ważną rolę odgrywają modele dobierane dla wąskiego zakresu zjawisk, tłumacząc dobrze te zjawiska i pozwalające na pewne przewidywania (np. model kroplowy jądra atomowego, wyjaśniający zjawisko jego rozczepiania). Modele matematyczne mogą opisywać zjawiska fizyczne bez wyjaśniania przyczyn wywołujących te zjawiska, mogą wyjaśniać je, mogą wykorzystać wyniki rachunku prawdopodobieństwa i tworzyć pewne statystyczne teorie.

Oczywiście żadne modele matematyczne nie są doskonałą ilustracją konkretnej sytuacji fizycznej, symulują one jedynie, w określonym zarysie, rzeczywisty świat fizyczny, a często „mechaniczne” wyobrażenie np. elektronu z jego właściwościami korpuskularno-falowymi są raczej utrudnieniem w postępie wiedzy.

2.2. Rodzaje oddziaływań w fizyce

Obserwowane w przyrodzie siły (oddziaływania) ze względu na ich wielkość dzielimy na cztery rodzaje

- oddziaływania silne (jądrowe)
- oddziaływania elektromagnetyczne
- oddziaływania słabe
- oddziaływania grawitacyjne

Ten podział, mimo starań od wielu lat badaczy, nie jest ujęty w jednolitą teorię oddziaływań. Istnieją nawet tendencje wyróżnienia wśród tych czterech fundamentalnych oddziaływań, oddziaływań supersilnych i superślabych.

Oddziaływania silne występują w grupach cząsteczek elementarnych zwanych barionami i mezonami (ogólnie hadronami), to jest cząstkami oddziaływującymi silnie. Oddziaływanie to jest odpowiedzialne za łączenia się nukleonów w jądra atomowe. Dla tego oddziaływania (pola sił) można zaobserwować kwant działania, to jest cząstkę będącą nośnikiem sił jądrowych.

Cząstkę tę, o masie około 270 mas elektronowych, nazwano mezonem π (pionem). Oddziaływania silne występują między cząsteczkami naładowanymi i obojętymi.

Z oddziaływaniami silnymi związana jest skala czasowa, wynosząca taki ułamek czasu, ile potrzebuje przebycie kwantu oddziaływania silnego poruszającego się z prędkością rzędu prędkości światła na odległościach rzędu średnicy jądra. Wielkość ta wynosi około 10^{-23} s i właśnie tego rzędu czasy życia będą miały cząstki rozpadające się z udziałem oddziaływań silnych. Cząstki posiadające czasy życia rzędu 10^{-23} s nazywamy rezonansami.

W życiu codziennym mamy najczęściej do czynienia z oddziaływaniem elektromagnetycznym. Siły te odznaczają się dużym zasięgiem i dlatego są łatwo obserwowalne zarówno w świecie mikroskopowym, jak i makroskopowym. Oddziaływania elektromagnetyczne są rzędu 10^3 razy słabsze od oddziaływań silnych. Opisują one siły elektryczne między ładunkami elektrycznymi w spoczynku, jak i siły magnetyczne między prądami wytworzonymi przez ładunki w ruchu, zjawiska emisji i absorpcji promieniowania elektromagnetycznego. Oddziaływanie między dwoma naładowanymi cząstkami możemy przedstawić jako wymianę między nimi kwantu pola elektromagnetycznego czyli fotonu wirtualnego.

Oddziaływania słabe są 10^{-14} razy słabsze od oddziaływań silnych, trwają więc w czasie rzędu 10^{-9} s. Oddziaływanie słabe jest oddziaływaniem krótkiego zasięgu. Jest ono odpowiedzialne za rozpad wielu cząstek, podlegającym oddziaływaniom silnym oraz za rozpad niektórych jąder atomowych. Cząstki oddziaływujące słabo nazywamy leptonami. Do nich należą elektrony e^- , e^+ , miony (miuony) μ^+ , μ^- oraz cząstki nie posiadające ładunku; neutrina.

Oddziaływanie grawitacyjne maleje z kwadratem odległości między przyciągającymi się masami i jest najbardziej poznanym oddziaływaniem fundamentalnym. Jest to oddziaływanie dalekiego zasięgu. Zakładając, że z ruchem pola siły związany jest kwant tego pola, należałoby oczekiwać wykrycia istnienia, w oddziaływaniach grawitacyjnych, cząstki zwanej grawitronem – cząstki o spinie 2. Dotychczas takiej cząstki nie wykryto ani też nie stwierdzono doświadczalnie absorpcji grawitacji. Oddziaływanie grawitacyjne jest wyróżniającym oddziaływaniem w makrokosmosie, w świecie cząstek elementarnych jest bardzo słabe i nie znaczące..

2.3 Granice fizyki klasycznej. Zasada nieoznaczoności Heisenberga

Każdy model matematyczny zjawiska fizycznego ma ograniczony zakres stosowalności. Np. ruch sztucznego satelity Ziemi (o rozmiarach rzędu kilku metrów) można opisać traktując satelitę jako punkt materialny, natomiast do opisu ruchu cząstek elementarnych (o rozmiarach rzędu 10^{-15} m) model punktu materialnego jest niewłaściwy. Do jego opisu należy stosować mechanikę kwantową. Jednym z podstawowych założeń mechaniki kwantowej jest założenie o nierozróżnialności jednakowych cząstek. Doświadczalnie można stwierdzić, że przejściu monochromatycznej wiązki światła (fotonów) lub przejściu cząstek elementarnych (np. elektronów) przez bardzo wąską szczelinę towarzyszy zjawisko dyfrakcji.

Na ekranie można zaobserwować obraz dyfrakcyjny złożony z jednego maksimum centralnego, otoczonego maksimumami wtórnymi o mniejszym natężeniu – Rys.5.

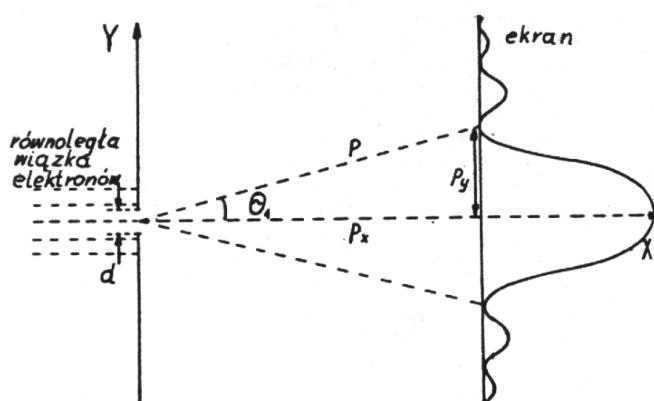
Korzystając z modelu falowej natury światła można wykazać, że położenie pierwszego minimum natężenia światła na ekranie o długości fali λ (w tym miejscu nastąpiło wzajemne wygaszenie się wiązek ugiętych) dane jest zależnością – Rys.6:

$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{d} \quad (21)$$

Równanie (43) jest słuszne również dla cząstek elementarnych, ponieważ mechanika kwantowa przypisuje poruszającym się cząstkom elementarnym ruch falowy, tzw. fale de Broglie'a.

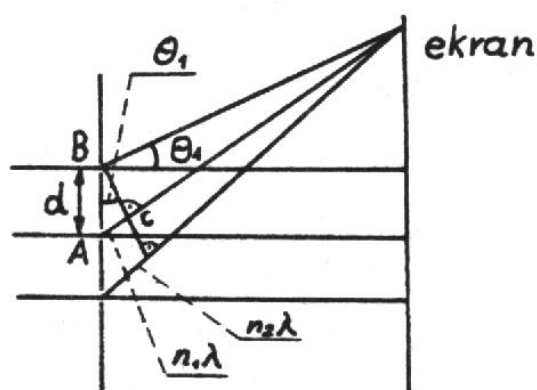
Pęd elektronów przed szczeliną wynosi $p = p_x$, $p_y = 0$, po przejściu przez szczelinę składowa $p_y = p \sin \theta_1$.

Z Rys.5. mamy



$$\frac{p_y}{p} = \sin \theta_1 \quad (22)$$

Rys.5. Obraz dyfrakcyjny wąskiej szczeliny oświetlonej równoległą wiązką elektronów lub monochromatyczną wiązką fotonów



Rys.6. Jeśli różnica dróg optycznych wynosi n , to na ekranie spotkają się w tym samym miejscu fale zgodne w fazie – nastąpi wzmocnienie. Z trójkąta prostokątnego ABC

$$\sin \theta_1 = n_1 \frac{\lambda}{d}$$

Pęd elektronu można wyznaczyć ze wzoru Einsteina

$$\text{dla korpuskuły } E = mc^2 = mc \cdot c = pc$$

$$\text{dla fali } E = h\nu = hc/\lambda$$

$$\text{gdzie: } \nu = c/\lambda = \text{częstość fali}$$

$$h = \text{stała Plancka}$$

$$c = \text{prędkość światła}$$

z porównania

$$pc = \frac{hc}{\lambda} \quad \text{i} \quad p = \frac{h}{\lambda} \quad (23)$$

Porównując wzory (21), (22) oraz (23) mamy

$$p_y = p \sin \theta_1$$

$$p_y = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{d}$$

$$\text{stąd } p_y = \frac{h}{d} \quad (24)$$

Oczywiście nigdy nie umiemy wskazać tego miejsca ekranu na który pada elektron, wiąże się to z niepewnością oceny pędu Δp_y , ani wskazać dokładny tor elektronu (niepewność oceny położenia Δy), dlatego też wzór (46) piszemy

$$\Delta p_y \cdot \Delta y = h \quad (25)$$

Uwzględniając maksima wtórne, wówczas niepewność oszacowania pędu i położenia spełnia warunek

$$\Delta p_y \cdot \Delta y \geq h \quad (26)$$

Wzór (26) nosi nazwę zasady nieoznaczoności Heisenberga i orzeka niemożliwość uzyskania równoczesnej, dokładnej informacji o niektórych parach wielkości (takie pary nazywamy kanonicznie sprzężonymi). Ta właściwość jest właściwością mikrocząstek i nie wynika z niedokładności pomiarów. Zasada nieoznaczoności Heisenberga wyznacza granice, poza którymi nie możemy stosować pojęć fizyki klasycznej.

Gdybyśmy dokładnie wyznaczyli położenie elektronu ($\Delta x=0$), to pęd elektronu będzie zupełnie nieokreślony i odwrotnie, jeżeli wyznaczymy dokładnie pęd, to nic nie będziemy wiedzieli o jego położeniu. Zasada nieoznaczoności opisuje „rozmycie”, występujące przy opisie mikroświata. Dla opisu tego mikroświata potrzebne są prawdopodobieństwa. W opisie np. atomu wodoru niepewność położenia elektronu jest tak duża jak rozmiar atomu!

Nie można więc mówić o orbicie elektronu, można mówić jedynie o prawdopodobieństwie znajdowania się elektronu w pewnym elemencie objętości, znajdującym się w danej odległości od protonu. Atom wodoru widziany przez pryzmat mechaniki kwantowej wyobrażamy sobie jako „chmurę”, której gęstość jest proporcjonalna do gęstości prawdopodobieństwa zaobserwowania elektronu w danym miejscu. Elektron znajdujący się w tej „chmurze” jest możliwy do zlokalizowania, przez obliczenie prawdopodobieństw znalezienia go w określonym miejscu.

Atom wzbudzony charakteryzuje się „rozmytymi” liniami, a ze stopnia „rozmycia” linii wnioskujemy o czasie życia atomu.

Korzystając z aparatu matematycznego mechaniki kwantowej, zasadę nieoznaczoności Heisenberga dla wielkości kanonicznie sprzężonych piszemy

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq 1/2 \hbar$$

$$\Delta p_y \cdot \Delta y \geq 1/2 \hbar$$

$$\Delta p_z \cdot \Delta z \geq 1/2 \hbar$$

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$$

$$\Delta \omega \cdot \Delta t \geq \hbar$$

gdzie: $\Delta \omega$ - charakteryzuje nieoznaczoność częstości,

Δt - charakteryzuje nieokreśloność czasu, w który ten proces zachodzi, względnie przedział czasu, w którym cząstka znajduje się w stanie energetycznym $E \pm \Delta E$.

2.4. Zadania do rozdziału 2

2.4.1. Oblicz średnią gęstość Ziemi i Słońca.

Promień Ziemi przyjmując $R = 6.378 \cdot 10^8$ m,

masa Ziemi $M = 5.977 \cdot 10^{24}$ kg,

promień Słońca $R = 6.960 \cdot 10^8$ m,

masa Słońca $M = 1.991 \cdot 10^{30}$ kg.

2.4.2. Oblicz średnią gęstość protonu oraz atomu wodoru.

Promień protonu $R = 1.5 \cdot 10^{-15}$ m,

masa protonu $M = 1.672 \cdot 10^{-27}$ kg,

masa elektronu $M_e = 9.108 \cdot 10^{-31}$ kg,

promień atomu wodoru $R = 5.292 \cdot 10^{-11}$ m

2.4.3. Jaką gęstość miałyby Ziemia gdyby była czarną dziurą ?

Stała grawitacji $G = 6.670 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²,

Prędkość światła $c = 2.998 \cdot 10^8$ m/s,

2.4.4. Jaką średnią gęstość ma obserwowany Kosmos?

„Promień” obserwowany Wszechświata wynosi $R = 10^{26}$ m,

masa $M = 10^{54}$ kg,

Liczba nukleonów wynosi 10^{80} .

Ile nukleonów przypada na jednostkę objętości?

2.4.5. Jaką średnią gęstość ma nasza galaktyka?

Promień naszej Galaktyki wynosi $R = 10^{21}$ m,

masa Galaktyki około $4 \cdot 10^{41}$ kg,

Jaka jest średnia liczba gwiazd przypadająca na 1 parsak ($1\text{pc} = 3.084 \cdot 10^{16}$ m) ?

Liczba gwiazd w Galaktyce wynosi około 10^{11} gwiazd.

2.4.6. Masa jednego mola wody wynosi 18 g,

gęstość wody wynosi 1000 kg/m³.

Zakładając, że objętość każdej molekuly można uważać za objętość sześcianu, wyznacz rozmiary molekuly wody.

Stała Avogadra $6.0225 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹.

- 2.4.7. Położenie swobodnego elektronu określono metodami optycznymi z dokładnością do 10^{-6} m. Oblicz nieokreśloność jego prędkości. Z jaką dokładnością będziemy znali położenie elektronu po upływie 1 s. Stała Plancka $h = 6.6 \cdot 10^{-34}$ J · s, masa elektronu $9.1 \cdot 10^{-31}$ kg.
- 2.4.8. Ciało o masie 10^{-3} kg spoczywa na absolutnie gładkiej powierzchni, a jego położenie określono z dokładnością 0.1 mm. Jaką prędkość udzieliliśmy temu ciału w procesie pomiaru jego położenia ?
- 2.4.9. Oszacuj masę pionu, to jest cząsteczki pośredniczącej w oddziaływaniach silnych, korzystając z następujących informacji: promień nukleonu wynosi $R = 1.5 \cdot 10^{-15}$ m, prędkość pionu wynosi 1/3 prędkości światła. Masę pionu wyraż w masach elektronu.
- 2.4.10. Przyjmując prędkość elektronu na orbicie $v = 1/3$ prędkości światła oszacuj nieokreśloność położenia elektronu na orbicie i porównaj ją z promieniem orbity $a_0 = 0.529 \cdot 10^{-10}$ m.

3. KINEMATYKA PUNKTU MATERIALNEGO

3.1. Układy odniesienia inercjalne i nieinercjalne

Dział fizyki zajmujący się ogólnymi prawami i zasadami ruchu ciał materialnych nazywamy mechaniką. W zależności o rodzaju ciał materialnych, ich wielkości, prędkości, rozróżniamy mechanikę kwantową i elektrodynamikę kwantową, która jest w tej chwili najogólniejszą i najdokładniejszą z istniejących dobrze sprawdzonych teorii fizycznych.

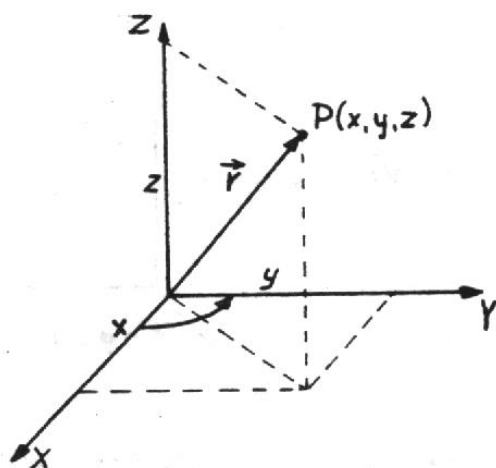
W mechanice przypisujemy niektórym ciałom o zadanej masie wymiary punktowe bez względu na ich rzeczywisty wymiar np. ruch Ziemi wokół Słońca można rozpatrywać, zanedbując rozmiary Ziemi.

Ten dział mechaniki, który zajmuje się opisem ruchu ciał w przestrzeni i czasie, bez wyjaśniania przyczyn wywołujących dany ruch, nazywamy kinematyką.

Najistotniejszą cechą ruchu jest jego względność. Wiąże się to z faktem, że opis ruchu, to jest opis zmian położenia w czasie punktów, wymaga zdefiniowania punktów odniesienia (układu odniesienia) względem którego mierzymy zmianę tego ruchu. Wybór odpowiedniego układu odniesienia zależy od wielu czynników, często o tym wyborze decyduje prostota zapisu matematycznego. W praktyce najczęściej przypisuje się układ odniesienia (układ współrzędnych) związany z miejscem obserwacji (laboratorium – a więc układ związany z obracającą się Ziemią), układ o osiach zorientowanych względem „nieruchomych” gwiazd stałych, nie biorących udziału w ruchu obrotowym Ziemi.

Opisu ruchu można dokonać w danym układzie współrzędnych podając takie parametry jak promień wodzący, składowe rzutu położenia, prędkości czy przyspieszenia na odpowiednie osie zorientowane względem siebie pod kątem prostym lub innym, odpowiednie kąty.

Aby przejść od opisu ruchu z jednego układu odniesienia do opisu ruchu w drugim układzie odniesienia, należy posługiwać się pewnymi przekształceniami matematycznymi.

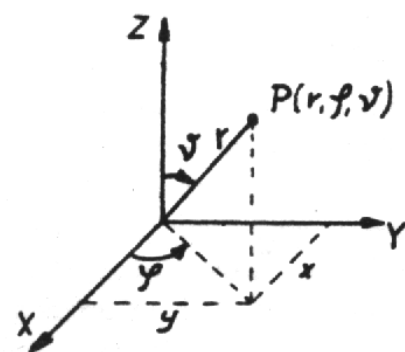


Rys.6. Kartezyjski układ współrzędnych

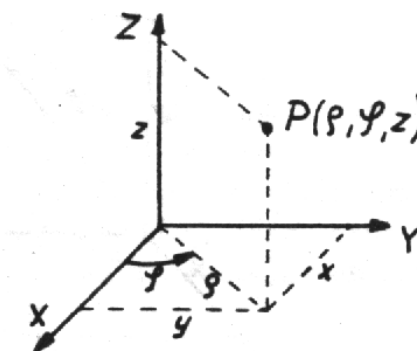
Położenie punktu P można scharakteryzować przez podanie trzech współrzędnych x, y, z lub przez określenie promienia wodzącego r i pewne dwa kąty. Składowe x, y, z wektora \vec{r} przedstawiamy zwykle jako iloczyn długości tych wektorów przez odpowiednie wektory jednostkowe, wówczas wektor promienia wodzącego

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

W przestrzeni trójwymiarowej oprócz współrzędnych kartezjańskich x, y, z stosuje się współrzędne sferyczne r, φ, ν - Rys.7 lub cylindryczne ρ, φ, z - Rys.8.



Rys.7. Układ współrzędnych sferycznych



Rys.8. Układ współrzędnych cylindrycznych

Między współrzędnymi (x, y, z) , (r, φ, ϑ) i (ρ, φ, z) istnieją zależności transformacyjne.

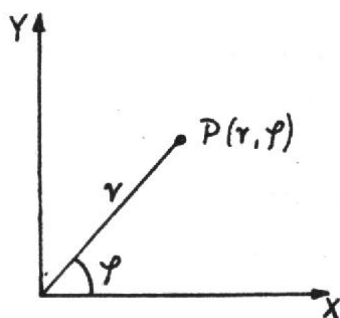
Na płaszczyźnie x, y oprócz współrzędnych kartezjańskich stosujemy współrzędne biegunowe (r, φ) - Rys.9 między współrzędnymi kartezjańskimi i biegunowymi zachodzą następujące związki

$$x = r \cdot \cos \varphi \quad (27)$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (28)$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}$$



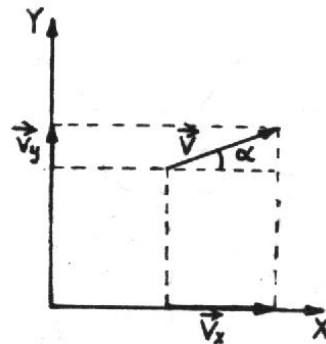
Rys.9. Współrzędne biegunowe

W fizyce rozpatrujemy układy inercjalne i nieinercjalne. Układami inercjalnymi nazywamy układy nie mające przyspieszenia. Układy inercjalne (układy Galileusza), są to takie układy, w których cząstka materialna spoczywa lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym jeśli nie działa na nią żadna siła. Istnienie układów inercjalnych postuluje I zasada dynamiki Newtona. Układy poruszające się ruchem jednostajnym prostoliniowym względem dowolnego układu odniesienia są również układami inercjalnymi.

Układy nieinercjalne są to układy wirujące oraz układy poruszające się ruchem jednostajnie przyspieszonym (ogólnie, ruchem zmiennym z przyspieszeniem $a \neq 0$).

3.2.1. Ruch jednostajnie prostoliniowy i ruch jednostajnie zmienny

Pewne wielkości fizyczne nazywamy wektorami. Są to takie wielkości fizyczne, dla których przy dodawaniu słuszne jest prawo równoległoboku, oraz zarówno wartość wektora, kierunek i zwrot nie zależą od wyboru układu współrzędnych. Prędkość jest wektorem. Rys.10 ilustruje prawo rozkładania wektora prędkości na jego składowe.



Rys.10. Składowe \vec{v}_x i \vec{v}_y wektora prędkości \vec{v} w prostokątnym układzie współrzędnych

Ruch ciała w przestrzeni opisujemy przez zależność od czasu promienia wodzącego

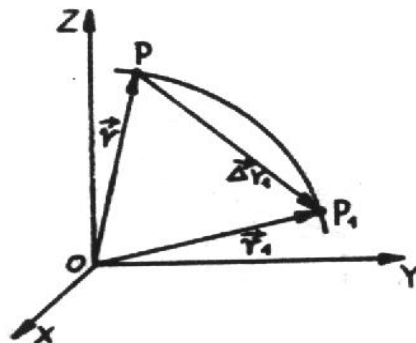
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Niech ciało w chwili t znajduje się w punkcie P , położenie którego charakteryzuje wektor wodzący \vec{r} , a po upływie czasu $\Delta t_1 = t_1 - t$ znajduje się w punkcie P_1 . Położenie punktu P_1 dane jest teraz przez wektor $\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta \vec{r}_1$.

Prędkością średnią danego punktu materialnego w czasie Δt_1 nazywamy wielkość –

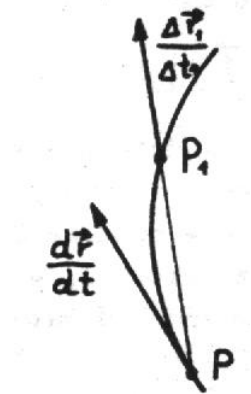
Rys.11.

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta \vec{r}_1}{\Delta t_1}$$



Rys.11. Prędkość średnia $\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta \vec{r}_1}{\Delta t_1}$.

gdy $\Delta t_1 \rightarrow 0$, wektor prędkości średniej $\frac{\Delta \vec{r}_1}{\Delta t_1}$ dąży do wektora prędkości $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ leżącego na stycznej do toru w punkcie P – Rys.12.



Rys.12. Wektor $\frac{\Delta \vec{r}_1}{\Delta t_1}$ dla $\Delta t_1 \rightarrow 0$ dąży do wektora $\frac{d\vec{r}}{dt}$.

Wektor \vec{v} nazywamy prędkością ciała w punkcie P

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

lub

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

Rozkładając wektor \vec{v} na składowe $\vec{v}_x, \vec{v}_y, \vec{v}_z$

gdzie

$$\vec{v}_x = v_x \vec{i}$$

$$\vec{v}_y = v_y \vec{j}$$

$$\vec{v}_z = v_z \vec{k}$$

otrzymujemy

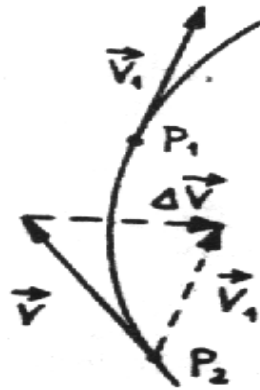
$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

to jest składowe wektora prędkości są pochodnymi względem czasu współrzędnych poruszającego się ciała, przy czym bezwzględną wartość prędkości obliczamy wzorem

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

i wartość ta jest oczywiście skalarem.

Jeśli wektory prędkości ciała w punktach P i P₁ wynoszą odpowiednio \vec{v} i \vec{v}_1 - Rys.13.



Rys.13. Przyspieszenie średnie $\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

to z uwagi na możliwą zmianę wartości wektora prędkości od punktu do punktu (ruch jednostajnie przyspieszony) lub ze względu na zmianę kierunku wektora prędkości, przy jego stałej wartości (ruch jednostajny po okręgu) lub ze względu na oba czynniki występujące jednocześnie (ruch krzywoliniowy zmienny) można określić, po przesunięciu wektora \vec{v}_1 do punktu P_1 zmianę $\Delta \vec{v}$ wektora prędkości (na Rys.13 oznaczono te wektory \vec{v}_1 i wektor $\Delta \vec{v}$ liniami przerywanymi).

Wektor \vec{a}_{sr} zdefiniowany

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

nazywamy wektorem przyspieszenia średniego ciała w czasie Δt . W granicy $\Delta t \rightarrow 0$ wyrażenie powyższe dąży do wektora \vec{a} zwanego przyspieszeniem ciała w punkcie P

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

lub

$$\vec{a} = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k}$$

przy czym

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}, \quad a_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = \ddot{z}$$

przedstawiają składowe wektora przyspieszenia będące pierwszymi pochodnymi składowych wektora prędkości względem czasu lub drugimi pochodnymi współrzędnych ciała względem czasu.

Wartość przyspieszenia $a = |\vec{a}|$ obliczamy wzorem

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Jeśli ograniczymy się do rozpatrywania ruchu ciała na płaszczyźnie, wówczas jeżeli tor ciała jest linią prostą, to wygodnej jest jedną z osi układu współrzędnych np. OX, skierować wzdłuż toru ruchu ciała. Mamy wówczas dla ruchu jednostajnie prostoliniowego

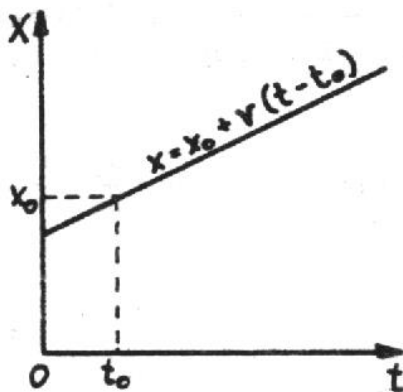
$$\vec{v} = v_x \vec{i} \quad , \quad \text{gdzie} \quad v_x = \frac{dx}{dt} = \text{const.}$$

więc ogólnie $dx = v dt$; całkując obustronnie

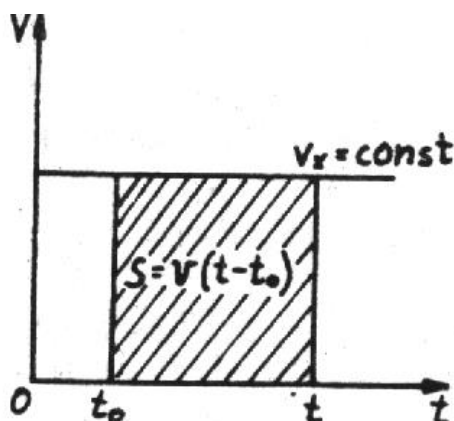
$$\int_{x_0}^x dx = v \int_{t_0}^t dt$$

$$x - x_0 = v(t - t_0)$$

skąd $x = x_0 + v(t - t_0)$ i na wykresie (x,t) droga jest liniową funkcją czasu (Rys.14.).



Rys.14. Droga w ruchu jednostajnie prostoliniowym



Rys.15. Pole zakreskowanego prostokąta przedstawia liczbowo drogę ruchu jednostajnie prostoliniowym

Dla ruchu jednostajnie prostoliniowego przyspieszonego

$$\vec{a} = a_x \vec{i} \quad \text{gdzie} \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = \text{const},$$

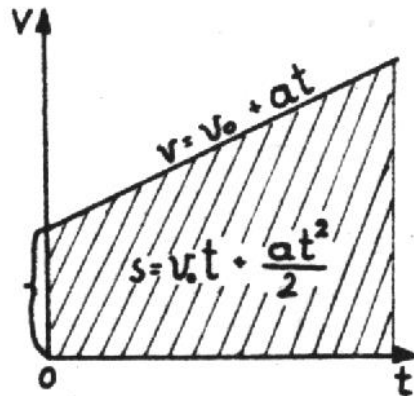
stąd:

$$dv = a dt \quad \text{i całkując obustronnie, mamy}$$

$$\int_{v_0}^v dv = a \int_{t_0}^t dt$$

i dalej $v - v_0 = a(t - t_0)$, lub $v = v_0 + a(t - t_0)$

czyli prędkość jest liniową funkcją czasu – Rys.16.



Rys.16. Prędkość w ruchu jednostajnie prostoliniowym

Ale $v = \frac{dx}{dt}$, czyli $dx = v dt$

dalej $dx = [v_0 + a(t)] dt$; po obustronnym scałkowaniu

$$\int_0^x dx = \int_0^t (v_0 + at) dt \quad \text{stąd}$$

$$x = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Powyższy wzór przedstawia drogę w ruchu jednostajnie prostoliniowym przyspieszonym.

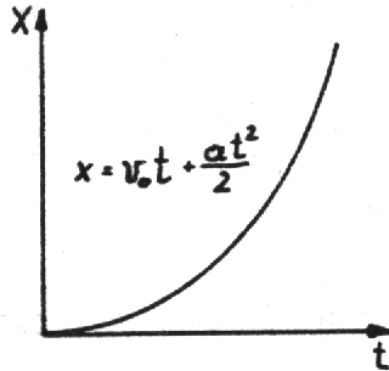
Jeżeli obustronnie przeniesiemy do kwadratu wzór $v = v_0 + at$ i uwzględnimy wprowadzony związek na drogę ruchu jednostajnie prostoliniowym przyspieszonym, wówczas otrzymamy bardzo użyteczny przy rozwiązywaniu zadań z kinematyki wzór

$$v^2 = v_0^2 + 2av_0 t + a^2 t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a\left(v_0 t + \frac{at^2}{2}\right)$$

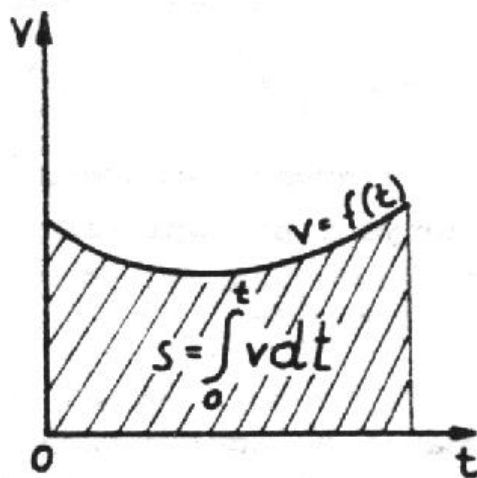
stąd $v^2 = v_0^2 + 2ax$

Wykresem drogi we współrzędnych (x, t) ruchu jednostajnie przyspieszonego jest równanie paraboli – Rys.17.



Rys.17. Wykres drogi w ruchu jednostajnie przyspieszonym po linii prostej

W przypadku ruchu prostoliniowego zmiennego, drogę obliczamy ze związku $s = \int_0^t v dt$ i liczbowo równa się ona polu zakreskowanemu na Rys.30.



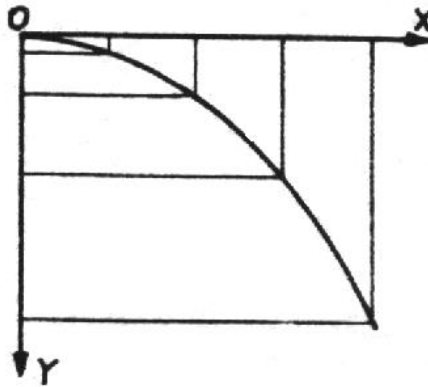
Rys.18. Droga w ruchu jednostajnie przyspieszonym jest równa liczbowo polu zakreskowanej figury

Szczególnymi przypadkami ruchu jednostajnie przyspieszonego prostoliniowego jest ruch w pobliżu powierzchni Ziemi z przyspieszeniem ziemskim \vec{g} . Dla niewielkich odległości od powierzchni Ziemi można przyjąć $g = \text{const}$.

3.2.2 Rzut poziomy

Jeśli ciało zostało wyrzucone z prędkością v_0 poziomo, to taki rzut nazywamy rzutem poziomym, jeśli między wektorem prędkości wektor \vec{v}_0 , a kierunkiem poziomym równoległym

do osi OX istnieje kąt α , to mówimy o rzucie ukośnym. Jeżeli kąt α wynosi 90° to mówimy o rzucie pionowym do góry lub o swobodnym spadaniu.



Rys.19. Tor ciała rzuconego poziomo

W rzucie poziomym – Rys.19., przemieszczenie ciała w kierunku poziomym odbywa się ruchem jednostajnie prostoliniowym

$$x = v_0 t$$

natomiast ruch w kierunku pionowym jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem g

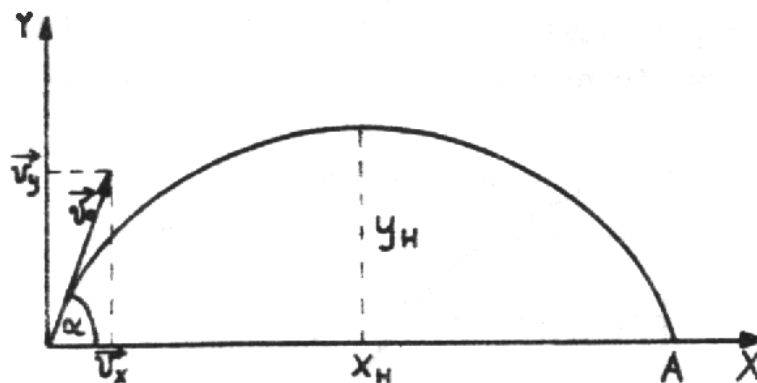
$$y = \frac{gt^2}{2}$$

jeśli z pierwszego równania obliczymy czas i wstawimy do drugiego równania to otrzymamy równanie toru ciała rzuconego poziomo. Torem tym jest parabola.

$$y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2}$$

3.2.3. Rzut ukośny

Obierzemy początek układu współrzędnych tak, aby dla chwili $t = 0$ ciało znajdowało się w początku układu, kąt między wektorem prędkości \vec{v}_0 tworzy kąt α z kierunkiem osi OX – Rys.20.



Rys.20. Rzut ukośny ciała

Składowe prędkości początkowej v_0 wynoszą

$$\begin{aligned}v_x &= v_0 \cos\alpha \\v_y &= v_0 \sin\alpha\end{aligned}$$

Droga przebyta ruchem jednostajnie prostoliniowym w kierunku osi OX wynosi

$$\begin{aligned}x &= v_x t \\ \text{więc } x &= v_0 t \cdot \cos\alpha\end{aligned}\quad (29)$$

natomiast w kierunku osi OY

$$\begin{aligned}y &= v_y t - \frac{gt^2}{2} \\ \text{lub} \\ y &= v_0 t \cdot \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}\end{aligned}\quad (30)$$

Obliczając czas t z równania (29) i wstawiając do (30), otrzymujemy

$$\begin{aligned}t &= \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \\ \text{i} \\ y &= x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}\end{aligned}\quad (31)$$

Otrzymane równanie przedstawia równanie paraboli. Przyrównując do zera (31) znajdziemy miejsca zerowe.

$$\begin{aligned}x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} &= 0 \\ x \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} &= 0 \\ \text{stąd } x = 0, \text{ lub} \\ x &= \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}\end{aligned}\quad (32)$$

Wzór (32) przedstawia maksymalny zasięg rzutu.

Jeśli zróżniczkujemy wyrażenie (31) i porównamy do zera pierwszą pochodną, to wyznaczymy współrzędną x_H będącą wartością, dla której parabola o równaniu (31) osiąga maksimum:

$$y' = \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$0 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

czyli

$$x_H = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \quad (33)$$

Znak drugiej pochodnej y'' (x_H) obliczanej x_H jest ujemny, więc funkcja (31) osiąga w tym punkcie maksimum

$$y'' = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

i

$$y''(x_H) < 0$$

Wstawiając obliczone x_H do równania paraboli (31) otrzymamy maksymalną wartość y_H , na którą wzniesie się ciało.

$$y_H = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{g}{2} \cdot \frac{v_0^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{g^2} \cdot \frac{1}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$y_H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

natomiast czas trwania ruchu obliczamy z porównania wzorów

$$x = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \quad \text{oraz} \quad x = v_0 t \cos \alpha$$

$$\text{stąd} \quad t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

Wprowadzone wzory dla rzutu poziomego i ukośnego są poprawne jedynie dla niewielkich wartości v_0 . Równania zostały prowadzone przecież przy założeniu, że ruch odbywa się w próżni, to jest zjawisko tarcia zostało zaniedbane. Rzeczywisty zasięg np. przy rzucie ukośnym przy dużej wartości v_0 może być kilkanaście razy mniejszy niż zasięg wynikający ze stosowania powyższych wzorów.

3.2.4. Rzut do góry. Swobodny spadek

Rzut pionowy do góry lub swobodny spadek ciał opisywany jest takimi samymi równaniami. Różnią się one znakiem wartości przyspieszenia ziemskiego $\pm g$. Przyjmujemy $+g$, jeśli ruch odbywa się od środka Ziemi, $-g$, jeśli ruch odbywa się w kierunku przeciwnym. Prędkość końcową obliczamy ze związku

$$v = v_0 \pm g \cdot t \quad (34)$$

natomiast wysokość spadania, lub maksymalną wysokość na jaką wzniesie się ciało rzucone pionowo do góry, wynosi

$$s = v_0 t \pm \frac{gt^2}{2} \quad (35)$$

3.2.5. Ruch po okręgu

Równanie okręgu o promieniu r we współrzędnych biegunowych zapisujemy równaniami

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\omega t) \\ y &= r \cdot \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (36)$$

Aby się o tym przekonać, podnieśmy do kwadratu te wyrażenia, a następnie dodajmy je stronami

więc

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \cdot \cos^2(\omega t) + r^2 \cdot \sin^2(\omega t) \\ x^2 + y^2 &= r^2 \end{aligned}$$

zróżniczkujemy wyrażenie (36) względem czasu

$$\frac{dx}{dt} = v_x = -r\omega \sin(\omega t) \quad (37)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = r\omega \cos(\omega t)$$

podnieśmy stronami do kwadratu i dodajmy

$$v_x^2 + v_y^2 = r^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) + r^2 \omega^2 \cos^2(\omega t)$$

więc

$$v^2 = r^2 \omega^2$$

i

$$v = r\omega \quad (38)$$

gdzie v - jest prędkością liniową punktu poruszającego się po okręgu.

Zróżniczkujemy powtórnie (37)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_x = -r\omega^2 \cos(\omega t)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a_y = -r\omega^2 \sin(\omega t)$$

podnieśmy stronami do kwadratu i dodajmy

$$a_x^2 + a_y^2 = a^2 = r^2 \omega^4 \cos^2 \omega t + r^2 \omega^4 \sin^2 \omega t$$

więc

$$a^2 = r^2 \omega^4$$

stąd

$$a = r\omega^2 \quad (39)$$

gdzie a – jest przyspieszeniem punktu w ruchu po okręgu.

Wstawiając (38) do (39) otrzymujemy (40)

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (40)$$

Wzór ten określa przyspieszenie dośrodkowe (normalne) i jego istnienie w ruchu jednostajnym po okręgu jest wynikiem zmian kierunku wektora prędkości.

Wielkość ω nazywana jest prędkością kątową (częstością kołową). Jeżeli przez T oznaczamy czas jednego obiegu to wielkość $1/T = f$ nazywamy częstością. Jeśli jeden pełny obrót oznaczamy przez 2π to

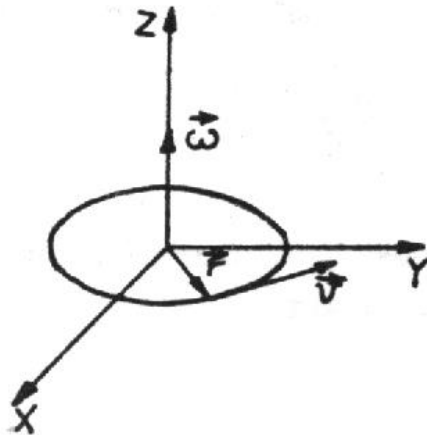
$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

i wówczas między częstością kątową (prędkością kątową), a częstością zwykłą f istnieje związek

$$\omega = 2\pi f \quad (41)$$

Równanie (38) można zapisać w postaci wektorowej, mianowicie

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



Rys.21. Wektory $\vec{\omega}, \vec{r}, \vec{v}$ w ruchu po okręgu.

Ogólnie w ruchu krzywoliniowym

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \quad \text{gdzie} \quad a_t = \frac{dv}{dt}$$

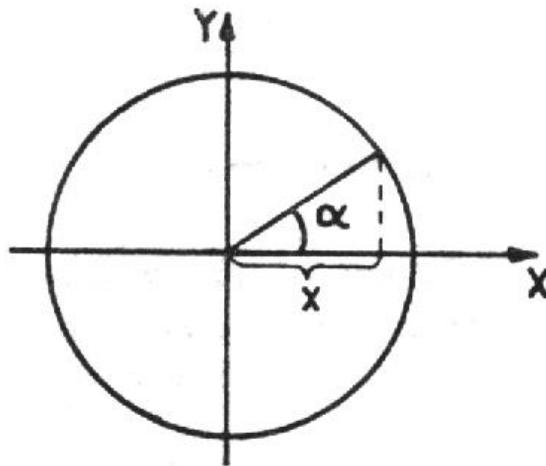
i $a_n = \frac{v^2}{r}$ (jest przyspieszeniem stycznym – tangencjalnym)

więc

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2}$$

tutaj r jest promieniem krzywizny toru krzywoliniowego. Dla linii prostej $r = \infty$ i $a = a_t$.

3.2.6. Ruch harmoniczny



Rys.22. Wychylenie $x = r \cdot \cos\alpha$ w ruchu harmonicznym

Ruch harmoniczny definiujemy jako ruch rzutu punktu materialnego, poruszającego się ruchem jednostajnym po okręgu na średnicę tego okręgu – Rys. 22.

Inną definicją ruchu harmonicznego jest: ruch punktu wokół położenia równowagi, jeżeli wychylenie x z tego położenia jest sinusoidalną funkcją czasu

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (42)$$

gdzie:

$(\omega t + \varphi)$ nazywamy fazą ruchu harmonicznego, wielkość φ nazywamy fazą początkową, A – jest maksymalnym wychyleniem punku z położenia równowagi.

Zróżniczkujemy wyrażenie (42) dwukrotnie względem czasu

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x \end{aligned} \quad (43)$$

Tak więc w ruchu harmonicznym przyspieszenie jest proporcjonalne do wychylenia. Powyższe stwierdzenie jest bardzo istotne dla stwierdzenia, czy dany ruch okresowy jest harmonicznym.

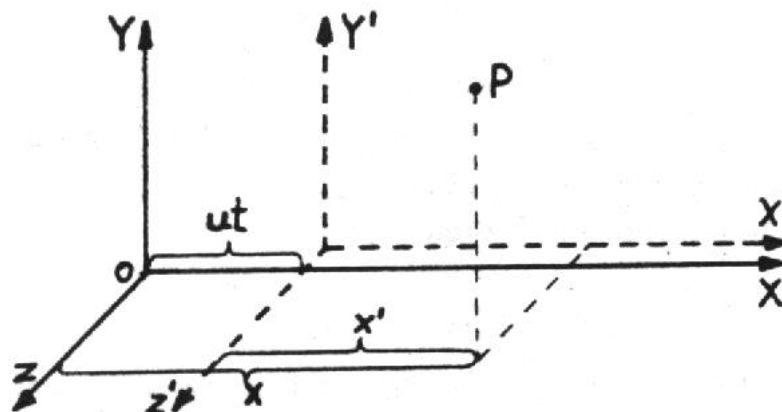
Wyrażenie (43) zapisane w postaci

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (44)$$

nazywa się różniczkowym równaniem ruchu harmonicznego.

3.3. Niezmienniczość Galileusza i niezmienniczość relatywistyczna

Na Rys.23. przedstawiono dwa układy inercjalne Galileusza o zgodnej orientacji osi, z których jeden o osiach primowanych porusza się względem drugiego nieprimowanego ze stałą prędkością v wzdłuż osi OX . Czas zaczynamy liczyć, gdy ośrodki O' i O układów współrzędnych pokrywały się. Po czasie t , odległość tych środków wynosi ut .



Rys.35. Wykres ilustrujący zależności między współrzędnymi dwóch układów inercjalnych

Jeśli więc obserwator związany z układem nieprimowanym (spoczywającym) przypisze pewnemu zdarzeniu P liczby x, y, z, t , to obserwator w układzie primowanym (poruszającym się ruchem jednostajnie prostoliniowym) przypisze temu zjawisku

$$\begin{aligned} x' &= x - ut \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \quad (45)$$

Ten ostatni związek ma charakter postulatu, że we wszystkich układach współrzędnych czas „płyń” tak samo.

Różniczkując powyższe wzory zwane transformacjami Galileusza otrzymujemy

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - u$$

czyli

$$v' = v - u \quad (46)$$

lub zapisie wektorowym

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{u} \quad (47)$$

Powyższe równanie wektorowe stanowi prawo składania prędkości, tzw. Galileuszowskie prawo składania prędkości.

Różniczkując powtórnie otrzymujemy

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

lub

$$a' = a$$

Tak więc, obserwatorzy w różnych układach inercjalnych obserwując ruch danego ciała stwierdzają, że ma on takie same przyspieszenie, sformułują więc takie same prawa opisujące jego ruch. To stwierdzenie bywa formułowane następująco: wszystkie prawa mechaniki klasycznej są niezmiennicze, inwariantne względem transformacji Galileusza, względnie, że za pomocą doświadczeń mechanicznych przeprowadzonych w pewnych inercjalnych układach nie można wykryć ruchu jednostajnego lub spoczynku tego układu względem innego, inercjalnego układu odniesienia.

Galileuszowskie prawo składania prędkości zostało doświadczalnie obalone słynnym doświadczeniem Michelsona – Morleya. Wyniki tego doświadczenia były następujące – prędkość światła jest stała we wszystkich układach inercjalnych, oraz że w zjawiskach elektrodynamicznych, w których mamy do czynienia z prędkością fal elektromagnetycznych nie obowiązuje Galileuszowskie prawo (47) składania prędkości.

Przyjęcie niezmienności praw przyrody zmusza nas do poszukiwań takich związków transformacyjnych, łączących dwa opisy tego samego zjawiska ze stanowiska różnych układów inercjalnych, aby dla dowolnych obserwatorów związanych z układami inercjalnymi, prędkość światła w próżni była taka sama. W dodatku takie związki transformacyjne muszą być liniowe, to znaczy, że pojedynczemu zdarzeniu w jednym układzie inercjalnym musi odpowiadać w drugim układzie również pojedyncze zdarzenie o jednoznacznie określonych współrzędnych. Poszukiwana transformacja, zwana transformacją Lorentza musi przekształcać ruch jednostajny w ruch jednostajny, oraz dla małych prędkości transformacja Lorentza musi się sprowadzić do transformacji Galileusza.

Niech poszukiwana transformacja w odniesieniu do jednej współrzędnej x ma postać (osie układów są zgodnie skierowane i ruch ciała odbywa się w kierunku osi OX - Rys. 23)

$$x' = k(x - ut) \quad (48)$$

Wyrażenie to jest liniowe i transformuje się w transformację Galileusza. Odwrotną transformacją będzie związek

$$x = k(x' + ut) \quad (49)$$

Zakładając następnie postulat stałości prędkości światła c

$$\begin{aligned} x &= ct \\ x' &= ct' \end{aligned}$$

gdzie: x = droga sygnału świetlnego w układzie nieprimowym

x' = droga sygnału świetlnego w układzie primowym przy czym sygnał został wysłany ze wspólnego początku w chwili

$$t_0 = t'_0 = 0$$

i mnożąc stronami wyrażenia (48) przez (49), mamy:

$$x' = k \left(x - u \frac{x}{c} \right) = kx \left(1 - \frac{u}{c} \right)$$

$$x = k \left(x' + u \frac{x'}{c} \right) = kx' \left(1 + \frac{u}{c} \right)$$

czyli

$$xx' = k^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) xx'$$

stąd

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Relatywistyczne związki transformacyjne Lorentza są więc następujące:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} & x &= \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ y' &= y & y &= y' \end{aligned} \quad (50)$$

lub

$$\begin{aligned} z' &= z & z &= z' \\ t' &= \frac{t - \frac{u}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} & t &= \frac{t' + \frac{u}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

przy czym czas wyznaczony został z równań

$$t' = \frac{x'}{c} = \frac{\frac{x}{c} - \frac{u}{c} t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{t - \frac{u}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Jeśli wielkość $\frac{u}{c} = \beta \rightarrow 0$ co równie jest stwierdzeniem, że $c \rightarrow \infty$, to otrzymujemy z transformacji Lorentza transformację Galileusza.

Ze związków transformacyjnych Lorentza wynika, że

$$t \neq t'$$

oznacza to, że czas jest lokalną własnością przestrzeni, co uwidocznione jest współrzędną x (x') we wzorze na t (t'). Czas nie płynie jednakowo we wszystkich punktach przestrzeni.

Z transformacji Lorentza wynikają następujące wnioski:

1° Niech obserwator w układzie spoczywającym zmierzy długość przedmiotu

$$\Delta l = x_2 - x_1$$

Jaką długość tego samego przedmiotu zmierzy obserwator znajdujący się w układzie inercyjnym poruszającym się z prędkością v względem układu spoczywającego?

$$\Delta l = x_2 - x_1$$

$$\Delta l' = x_2' - x_1'$$

przy czym

$$x_2' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

więc

$$\Delta l' = \frac{x_2 - vt_2 - x_1 + vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta l - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Wyznaczamy $t_2 - t_1$ ze stanowiska obserwatora poruszającego się

$$t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{i} \quad t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

więc $t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)$ ponieważ $t_2' = t_1'$

(pomiaru dokonano w układzie primowym jednocześnie)

Tak więc

$$\Delta l' = \frac{\Delta l - v \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta l \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$i \quad \Delta l' = \Delta l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (51)$$

Obserwator ruchomy oceni długość tego przedmiotu krótszą o czynnik Lorentza - Fitzgeralda $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Jeśli obserwator ruchomy zmierzy długość

$$\Delta l' = x_2' - x_1'$$

to jaką długość tego samego przedmiotu zmierzy obserwator znajdujący się w spoczywającym układzie inercyjnym?

Obserwator spoczywający zmierzy

$$\Delta l = x_2 - x_1$$

Ze związków transformacyjnych Lorentza (50), mamy:

$$x_2 = \frac{x_2' + vt_2'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad x_1 = \frac{x_1' + vt_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

więc

$$\Delta l = \frac{x_2' + vt_2' - x_1' + vt_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta l' + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Oszacujmy $t_2' - t_1'$ ze stanowiska obserwatora spoczywającego

$$t_2 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2} x_2'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t_1 = \frac{t_1' + \frac{v}{c^2} x_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

więc

$$t_2' - t_1' = \frac{v}{c^2} (x_2' - x_1')$$

ponieważ $t_2 = t_1$ (w układzie spoczywającym pomiar przeprowadzono równocześnie)

$$\text{stąd} \quad \Delta l = \frac{\Delta l' + v \frac{v}{c^2} (x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta l' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

czyli $\Delta l = \Delta l' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, a więc obserwator spoczywający również oceni tę długość jako krótszą.

2° Niech obserwator spoczywający zmierzy odstęp czasu

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

pomiędzy dwoma zdarzeniami. Jaki wynik pomiaru odstęp czasu pomiędzy tymi samymi zdarzeniami otrzyma obserwator ruchomy?

Z transformacji Lorentza czasu mamy:

$$t_2' = \frac{t_2 + \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t_1' = \frac{t_1 + \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

stąd

$$\begin{aligned} t_2' - t_1' &= \frac{t_2 - \frac{v}{c^2} x_2 - t_1 + \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \\ &= \frac{t_2 - t_1 + \frac{v}{c^2} (x_1 - x_2)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Pomiar czasu $t_2 - t_1$ obserwator ruchomy dokonuje w tym samym miejscu, czyli $x_2 = x_1$, więc

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (52)$$

Oznacza to, że obserwator ruchomy oceni ten odstęp czasu jako dłuższy. Zmierzony przez obserwatora odstęp czasu

$$\Delta t' = t_2' - t_1'$$

oszacuje spoczywający obserwator

$$\begin{aligned} \Delta t = t_2 - t_1 &= \frac{t_2' + \frac{v}{c^2} x_2' - t_1' - \frac{v}{c^2} x_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \\ &= \frac{t_2' - t_1' + \frac{v}{c^2} (x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

również jako dłuższy. Skorzystaliśmy tu z warunku, że $x_2' = x_1'$ (obserwator ruchomy dokonuje pomiaru czasu w tym samym miejscu). Otrzymany rezultat wskazuje, że czas własny rozumiany jako czas mierzony w układzie, w którym zegar spoczywa, płynie wolniej.

3° Niech w układzie primowym porusza się cząstka ruchem jednostajnie prostoliniowym w kierunku osi OX z prędkością v' . Jaką prędkość tej samej cząstki zmierzy obserwator w układzie spoczywającym, jeśli prędkość tego układu względem układu nieruchomego wynosi v ?

Z transformacji Lorentza

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

więc prędkość wypadkowa u

$$u = \frac{x' + vt'}{t' + \frac{v}{c^2} x'} = \frac{t' \left(\frac{x'}{t'} + v \right)}{t' \left(1 + \frac{v}{c^2} \frac{x'}{t'} \right)}$$

oznaczając

$$\frac{x'}{t'} = v'$$

mamy:
$$u = \frac{v' + v}{1 + \frac{v'v}{c^2}} \quad (53)$$

natomiast obserwator ruchomy przypisze tej cząstce

$$v' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

Prawo (53) zastępuje w szczególnej teorii względności galileuszowskie prawo składania prędkości. Wzór ten przekształca się w znany wzór mechaniki klasycznej

$$u = v' + v \quad \text{gdy} \quad c \rightarrow \infty$$

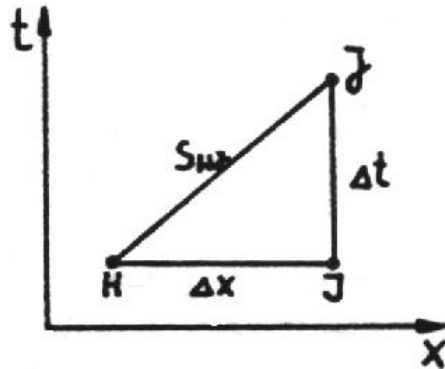
W ogólnym przypadku, gdy osie układów primowych i nieprimowych nie są skierowane zgodnie, wyprowadzenie związków transformacyjnych jest rachunkowo żmudne.

Wzajemne położenie zdarzeń w czasoprzestrzeni wyznaczamy tak zwanym interwałem czasoprzestrzennym s_{HJ} - Rys. 24.

$$s_{HJ} = \pm \sqrt{(\Delta x)^2 - (\Delta t)^2}$$

Ogólnie odległością zdarzeń H i J w czterowymiarowej czasoprzestrzeni Minkowskiego nazywamy interwał czasoprzestrzenny

$$s_{HJ} = \pm \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (\Delta t)^2}$$



Rys. 24. Interwał czasoprzestrzenny S_{HJ}

3.4. Zadania do rozdziału 3

3.4.1. Ciało doznaje dwóch kolejnych co do wartości przesunięć z prędkościami $\vec{v}_1 = 10 \frac{m}{s}$ i pod kątem $\alpha_1 = 45^\circ$ i z prędkością $\vec{v}_2 = 20 \frac{m}{s}$ pod kątem 135° względem danego kierunku. Znaleźć średnią prędkość \vec{v}_{sr} .

3.4.2. Łódka porusza się po rzece z prędkością \vec{v} względem wody, pod kątem $\alpha = 120^\circ$ do prądu, którego prędkość wynosi \vec{u} . Znaleźć prędkość łódki względem brzegu oraz kierunek prędkości wypadkowej względem kierunku prądu rzeki. Przyjąć $v = 3 \frac{m}{s}$, $u = 4 \frac{m}{s}$.

3.4.3. Łódź przepływa rzekę o szerokości $s = 200 \text{ m}$ z prędkością $v_1 = 4 \frac{m}{s}$ w kierunku poprzecznym do brzegu rzeki płynącej z prędkością $v_2 = 2 \frac{m}{s}$. O ile metrów zostanie zniesiona łódź w dół rzeki w chwili lądowania?

3.4.4. Dwa samochody poruszają się po dwóch prostoliniowych i wzajemnie prostopadłych drogach w kierunku ich przecięcia ze stałymi prędkościami $v_1 = 54 \frac{km}{h}$ i $v_2 = 108 \frac{km}{h}$. Przed rozpoczęciem ruchu pierwszy samochód znajdował się w odległości $s_1 = 120 \text{ km}$ od skrzyżowania, a drugi w odległości $s_2 = 60 \text{ km}$ od ich przecięcia. Po jakim czasie od chwili rozpoczęcia ruchu odległość między samochodami będzie najmniejsza?

3.4.5. Znaleźć wartość pierwszej i drugiej prędkości kosmicznej dla Księżyca. Przyjąć dane: średnica $D = 3500 \text{ km}$, masa Księżyca $M = 7,3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$, stała grawitacji $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

3.4.6. Ciało znajdującemu się na wysokości 100 m nadano prędkość początkową $v_0 = 20 \frac{m}{s}$. Znaleźć czas po jakim ciało osiągnie powierzchnię Ziemi, jeżeli prędkość początkowa v_0 była skierowana a) do góry, b) do dołu. Czy prędkość ciała w chwili uderzenia o Ziemię będzie w obu przypadkach jednakowa?

3.4.7. Zakładając, że $ma = G \frac{Mm}{R^2}$, wyprowadź trzecie prawo Keplera.

3.4.8. Promienie Ziemi i Księżyca wynoszą odpowiednio 6378 km i 1738 km, a ich masy mają się do siebie jak 81,3 do 1. Oblicz przyspieszenie grawitacyjne na Księżycu przyjmując, że $g_z = 9,80 \frac{m}{s^2}$.

3.4.9. Prędkość samochodu jadącego jednostajnie prostoliniowo spadła z 72 km/h do 36 km/h na drodze $x = 75$ m.

a) jaką wartość liczbową ma przyspieszenie?

b) jak długo trwało hamowanie

3.4.10. Z wieży o wysokości 19,6 m. wyrzucono w kierunku poziomym ciało z prędkością $v = 15$ m/s. Napisz równanie toru tego ciała. Jaka jest prędkość ciała w chwili upadku? Jaki kąt tworzy wektor prędkości z płaszczyzną poziomą? Zaniedbać opór powietrza.

3.4.11. Znaleźć prędkość kuli, jaką po wystrzale z karabinu w kierunku poziomym kula przebiła dwie pionowe kartki papieru ustawione w odległości $s = 30$ m od siebie, jeśli okazało się, że otwór w drugiej kartce znajduje się o $h = 10$ cm niżej niż otwór w pierwszej kartce.

3.4.12. Ile obrotów dokona koło od momentu włączenia hamulca do momentu zatrzymania się, jeżeli w chwili hamowania wykonało ono $n = 1800$ obrotów/min i zatrzymało się po upływie $t = 20$ s od chwili rozpoczęcia hamowania?

3.4.13. Rowerzysta ma przejechać po torze w kształcie „martwej pętli”, której promień jest równy 10 m. Z jakiej wysokości powinien rozpocząć rozbieg, aby nie spaść w górnym punkcie pętli?

3.4.14. Czy woda wyleje się, jeśli obracamy wiadro z częstością 20 obrotów/min? Przyjmij $R = 1$ m.

3.4.15. Wał poruszając się ruchem jednostajnie przyspieszonym dokonał $n = 200$ obrotów w ciągu $t = 20$ s. Określ prędkość kątową wału przy końcu dwudziestej sekundy, jeśli w chwili $t = 0$ wał znajdował się w spoczynku.

3.4.16. Kamień rzucony pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu. Energia kinetyczna kamienia w chwili początkowej wynosiła 60 J. Pomijając opór powietrza wyznacz energię kinetyczną i

potencjalną w najwyższym punkcie toru. Z jaką prędkością początkową wyrzucono kamień o masie $m = 100 \text{ g}$ i jaką wysokość ono osiągnęło?

3.4.17. Kamień rzucony z wysokości $h = 3 \text{ m}$ pod kątem $\alpha = 45^\circ$ do poziomu, pada na ziemię w odległości $s = 50 \text{ m}$ mierzonej poziomo od miejsca wyrzucenia. Znaleźć prędkość początkową kamienia v_0 , czas lotu t i maksymalną wysokość H względem poziomu ziemi. Wyznaczyć promień krzywizny toru w najwyższym punkcie toru i w punkcie upadku kamienia na ziemię.

3.4.18. Prędkość pierwszego sztucznego satelity Ziemi wynosiła 8 km/s , a okres obiegu 1 godzinę 36 minut. Zakładając, że orbita jest kołową, a ruch jednostajny, znaleźć wysokość, na której sztuczny satelita okrąża Ziemię.

3.4.19. Mezon μ utworzony w górnych warstwach atmosfery, przebywa do chwili rozpadu odległość 5 km z prędkością $v = 0,99 c$

a) jaki długi jest „czas życia” mierzony w jego własnym układzie odniesienia?

b) jaką grubość atmosfery, mierzoną w jego własnym układzie odniesienia, przebędzie mion?

3.4.20. Dowieść, że kwant światła wysłany z prędkością c przez gwiazdę poruszającego się w kierunku Ziemi z prędkością v , zbliża się do Ziemi z prędkością c , a nie $c+v$

3.4.21. Ciało porusza się z prędkością $v = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Ile razy wzrosła gęstość ciała? Czy wymiary ciała prostopadłe do kierunku ruchu ulegną skróceniu?

Wskazówka:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

4. PRAWA RUCHU

4.1. Zasady Newtona, opory ruchu

Omawiane w rozdziale 2 oddziaływania w fizyce odpowiedzialne są za ruchy cząstek w otaczającym nas świecie materialnym. Oddziaływania te mogą zmieniać strukturę wewnętrzną oddziałujących ciał lub zmiany te mogą być zaniedbywane i jedynym wyraźnym efektem tych oddziaływań RWA będzie zmiana stanu ruchu tych ciał.

Dział mechaniki zajmujący się warunkami, w jakim ruchy powstają, uwzględniający czynniki wywołujące ruch przy zaniedbaniu zmian struktury, nazywamy dynamiką (od greckiego słowa „dynamis” – „moc, działanie”).

Za zmiany stanu ruchu ciał odpowiedzialne są siły, które przenoszone są przez pola. Oddziaływania między cząsteczkami zachodzą w pewnej odległości od nich i w olbrzymiej części występujące siły międzycząsteczkowe (molekularne) można sprowadzić do oddziaływań elektromagnetycznych.

Prawa dynamiki klasycznej sformułowane zostały przez Isaaca Newtona w traktacie „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica” w 1687 r.

I prawo dynamiki Newtona brzmi:

„Każde ciało trwa w spoczynku lub ruchu prostoliniowym jednostajnym, jeśli siły przyłożone nie zmuszają ciała do zmiany tego stanu”.

Prawo to nazywane jest również zasadą bezwładności i stanowi postulat istnienia układu inercyjnego. Oczywiście układy spoczywające, względnie poruszające się prostoliniowo bez przyspieszenia względem tych samych układów, są też układami inercyjnymi (układami galileuszowskimi). Jeśli więc przyjmujemy istnienie jednego układu inercyjnego, to istnieje ich nieskończenie wiele, przy czym zasada bezwładności nie wskazuje gdzie taki układ inercyjny w przyrodzie istnieje. W zależności od rozpatrywanego problemu, za taki układ inercyjny można przyjąć układ laboratoryjny (oczywiście Ziemia nie jest układem inercyjnym, ponieważ w ruchu obrotowym występuje przyspieszenie dośrodkowe o wartości $a_R = \omega^2 R \cos^2 \varphi$, gdzie φ jest szerokością geograficzną miejsca obserwacji). Obiegająca po elipsie dookoła Słońca Ziemia doznaje dodatkowego przyspieszenia dośrodkowego o wartości $a_s = \frac{4\pi^2}{T^2} R$. Wartość tego przyspieszenia dośrodkowego oraz wpływ innych przyspieszeń dośrodkowych, wynikających z obrotu układu słonecznego względem środka galaktyki względnie ruchu naszej grupy galaktyk względem Supergromady Galaktyk, można w wielu przypadkach pominąć.

II prawo dynamiki Newtona brzmi:

„Zmiana ruchu jest proporcjonalna do przyłożonej siły poruszającej i odbywa się w kierunku prostej, wzdłuż której siła jest przyłożona”

Prawo to zapisujemy w postaci wektorowej

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (54)$$

Definiuje ono pojęcie masy bezwładnej i siły. Występująca w tym wzorze masa bezwładna (masa inercyjna) jest własnością materii. Jest miarą ilości materii zawartej w danym ciele i ta ilość (liczba atomów) jest niezależna od tego, czy ta ilość materii znajduje się na Ziemi, Księżycu czy w przestrzeni kosmicznej.

Między masą bezwładną a ciężarem ciała istnieje zasadnicza różnica. Ciężar ciała jest siłą ciężkości w układzie inercyjnym działającą na ciało znajdujące się np. na powierzchni Ziemi (przyśpieszenie siły ciężkości w miejscu obserwacji wynosi g) czy na np. powierzchni Księżyca (przyśpieszenie siły ciężkości na Księżycu jest w przybliżeniu sześć razy mniejsze).

Jeśli przez m_1 oznaczymy masę bezwładną, a przez m_2 jego masę grawitacyjną, to ciężar ciała obliczamy z zależności

$$\vec{F} = m_2 \cdot \vec{g}$$

Przeprowadzone już od czasu Newtona pomiary stosunku $\frac{m_1}{m_2}$ dają w bardzo dokładnych

pomiarach (do rzędu 10^{-11}) równość obu mas. Ta równość obu mas jest jednym z podstawowych założeń ogólnej teorii względności i nosi nazwę zasady równoważności.

Jeśli założymy, że masa jest wielkością stałą, to drugą zasadę dynamiki możemy zapisać jeszcze innym związkiem

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \frac{d \vec{v}}{dt} = \frac{d \vec{p}}{dt} \quad (55)$$

gdzie wektor $\vec{p} = m\vec{v}$ nazywamy pędem ciała, a wielkość $\frac{d \vec{p}}{dt}$ interpretujemy jako zmianę ruchu na jednostkę czasu.

Równanie to napisane w postaci (55) jest podstawowym prawem klasycznej mechaniki.

Jeśli scałkujemy równanie (55) w przedziale czasu $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d \vec{p}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

to $\Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t$ Jeśli F jest wielkością stałą

lub $\Delta \vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$ Jeśli F jest wielkością zmienną

Wyrażenie po prawej stronie powyższych równań dla skończonych przyrostów czasu nazywamy popędem \vec{F} w czasie Δt .

III zasada dynamiki brzmi :

„Względem każdego działania istnieje przeciwdziałanie skierowane przeciwnie i równe, to jest wzajemne działania dwóch ciał są zawsze równe sobie i skierowane przeciwnie”.

Zasadę akcji i reakcji (III zasadę dynamiki) dla dwóch ciał zapisujemy

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (56)$$

czyli dla sił wewnętrznych (siły wewnętrzne spełniające zasadę akcji i reakcji nazywamy siłami niutonowskimi) jest spełnione: jeżeli drugie ciało działa na pierwsze siłą \vec{F}_{12} , to pierwsze ciało działa na drugie z siłą \vec{F}_{21} równą co do wartości bezwzględnej i kierunku, lecz o przeciwnym zwrocie. Ze wzoru (85) wynika, że \vec{F}_{11} oraz $\vec{F}_{22} = 0$, czyli ciało nie oddziałuje samo na siebie.

Trzecia zasada dynamiki jest spełniona w życiu codziennym z bardzo dużą dokładnością, w świecie oddziaływań między cząsteczkami jest ono słuszne jedynie w

przybliżeniu. Wiąże się to z faktem, że oddziaływania np. dwóch ciał za pośrednictwem pola rozchodzą się zawsze ze skończoną prędkością a nie natychmiastowo.

Opory ruchu

Jeżeli pewną część energii zamienia się w postać dla nas bezużyteczną, to takie zjawisko nazywamy tarcie. Prawa opisujące zjawiska tarcia otrzymujemy zwykle na drodze doświadczalnej. Tarcie występuje przy poruszaniu się ciał stałych po powierzchni innych ciał stałych (tarcie przy poślizgu, przy toczeniu), przy poruszaniu się ciała stałego w cieczach (łódź podwodna) lub gazie (samochód, samolot).

II zasadę dynamiki po uwzględnieniu siły tarcia zapisujemy w następującej postaci:

$$F - F_T = ma$$

Jeśli siła tarcia równoważy siłę zewnętrzną działającą na ciało, czyli $F - F_T = 0$, to ciało porusza się ruchem jednostajnym .

I prawo tarcia Amontonsa – Coulomba brzmi:

Siła tarcia F_T między dwoma ciałami jest proporcjonalna do siły normalnej F_n utrzymującej te ciała w zetknięciu

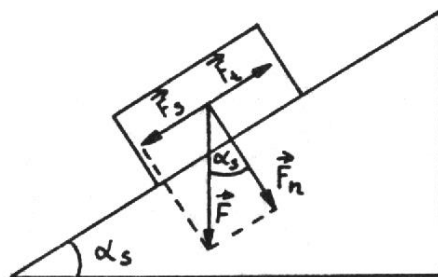
$$F_T = \mu F_n$$

a zwrot siły tarcia jest przeciwny do zwrotu wektora prędkości. Wielkość μ nazywamy współczynnikiem tarcia.

Doświadczenie poucza, że siła potrzebna do wprawienia ciała w ruch jest zwykle większa od siły potrzebnej do utrzymania go w ruchu jednostajnym. Wyraża się to tym, że współczynnik tarcia statycznego jest większy od tarcia kinetycznego.

Pierwsze prawo tarcia nie jest spełnione dokładnie. Dla bardzo dużych sił dociskających, np. dwóch powierzchni metalu, ich powierzchnie, zwykle pokryte cienką warstwą tlenków, ulegają zniszczeniu i wówczas stykające się czyste powierzchnie powodują, że współczynnik tarcia poślizgowego powiększa się.

Na Rys.25 przedstawiono sposób wyznaczania współczynnika tarcia statycznego. Na równi pochyłej o zmiennym kącie nachylenia znajduje się klocek. Ten kąt α_s , przy którym ciało zaczyna zsuwać się z równi, wyznacza współczynnik tarcia statycznego.



Rys.25. Pomiar współczynnika tarcia statycznego

Siłę ciężkości $\vec{F} = m\vec{g}$ rozkładamy na siły składowe \vec{F}_n (siłę normalną) oraz siłę \vec{F}_s (siłę styczną do powierzchni) będącą równą sile tarcia \vec{F}_T $F_s = F_T = mgsin\alpha_s$

Korzystając z (57), mamy

$$F_T = \mu_s F_n = \mu_s mg \cos \alpha_s$$

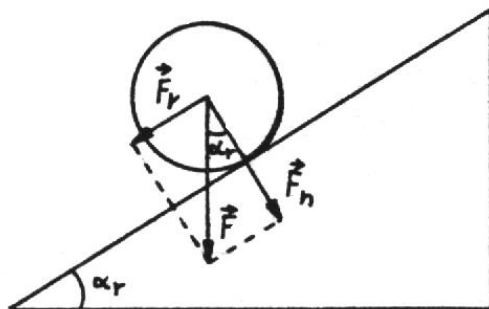
Korzystając z faktu, że siła tarcia jest proporcjonalna do siły normalnej, stąd

$$\mu_s mg \cos \alpha_s = mg \sin \alpha_s$$

i

$$\mu_s = \tan \alpha_s$$

Na Rys.26. przedstawiono sposób wyznaczania tarcia przy toczeniu.



Rys.26. Pomiar współczynnika tarcia przy toczeniu

Kąt nachylenia równi jest tak dobrany, że walec o promieniu r toczy się ruchem jednostajnym.

Moment siły ciężkości walca względem chwilowej osi obrotu, wynosi

$$M_F = Fr \sin \alpha_r$$

i musi być on zrównoważony przez moment siły tarcia

$$M_T = F_n \mu_r$$

Z Rys.26. otrzymujemy

$$F_n = F \cos \alpha_r$$

ale siła tarcia jest proporcjonalna do nacisku, więc

$$F \cdot r \cdot \sin \alpha_r = F \mu_r \cos \alpha_r$$

$$\mu_r = r \tan \alpha_r$$

Składową siły ciężkości \vec{F} równoległą do powierzchni możemy uważać za siłę tarcia T

$$T \cdot r = \mu_r F \quad , \quad \text{stąd} \quad T = \mu_r \frac{F}{r}$$

Powyższy wynik interpretujemy następująco: aby zmniejszyć tarcie przy jeździe po terenie piaszczystym należy używać pojazdów o dużych kołach.

Obecnie przyjmuje się, że tarcie spowodowane jest oddziaływaniem molekularnym pomiędzy cząsteczkami stykających się ciał. Z uwagi na fakt, że źródłem oddziaływań

międzycząsteczkowych są oddziaływania elektromagnetyczne, których uwzględnić nie umiemy, to daje nam wyobrażenie o statystycznym ujęciu tego zjawiska.

II prawo tarcia Amontonsa – Coulomba brzmi:

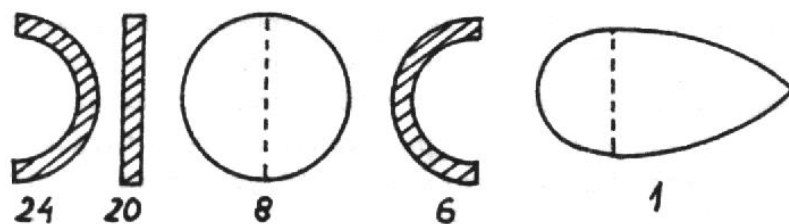
Dla danej siły normalnej F_n siła tarcia poślizgowego nie zależy od powierzchni zetknięcia między dwoma ciałami.

Dwa stykające się przedmioty „kontaktują” się ze sobą tylko w pewnych punktach ich powierzchni. Spowodowane jest to tym, że stykające się powierzchnie nie są idealnie gładkie. W punktach zetknięcia ciał działają olbrzymie siły spójności. Tarcie poślizgowe powoduje przewyciężenie tych sił łączących stykające się punkty. Z powyższego wynika, że rzeczywista powierzchnia zetknięcia jest znacznie mniejsza od powierzchni geometrycznej stykających się ciał.

III prawo tarcia Amontonsa – Coulomba brzmi:

Współczynnik tarcia kinetycznego nie zależy od prędkości ślizgającego się ciała (dla niewielkich prędkości), dla większych prędkości, współczynnik tarcia kinetycznego zmniejsza się.

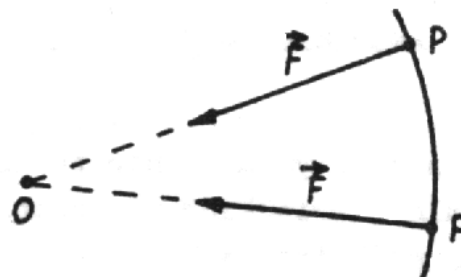
Zagadnienie zmniejszania szkodliwego wpływu tarcia w technice jest przedmiotem wielu zabiegów. Dotyczy to zrozumienia i wykorzystania sił lepkości między wprowadzanymi smarami rozdzielającymi trące się powierzchnie metalu, uwzględnienie kształtu opływowego – patrz Rys.27.



Rys.27. Opór całkowity przy opływaniu ciał o różnych kształtach

4.2. Ruch w polu elektrycznym, magnetycznym i grawitacyjnym

Siłę \vec{F} działającą na punkt materialny stale skierowaną do tego samego punktu O (Rys.44.) nazywamy siłą centralną.



Rys. 28. Siła centralna

Pod wpływem siły centralnej punkt P może poruszać się po okręgu, elipsie (np. planety) lub hiperboli (kometry).

Jako przykład opisu ruchu po okręgu rozważamy ruch geostacjonarnego satelity Ziemi, który porusza się po orbicie kołowej, koncentrycznej i leżącej w płaszczyźnie równika Ziemi. Dla tego przypadku, siła przyciągania grawitacyjnego, określona prawem Newtona o powszechnej grawitacji, jest równa sile odśrodkowej i przeciwnie do niej skierowana. Wysokość na której powinien znajdować się sztuczny satelita powinna być taka, aby okres obrotu sztucznego satelity dookoła Ziemi zgadzał się z okresem obrotu ruchu obrotowego Ziemi.

Liniowa prędkość sztucznego satelity zależy od jego odległości od środka Ziemi

$$v = \frac{2\pi R}{T} \text{ gdzie } T \text{ jest okresem równy 1 dobie}$$

Przyspieszenie dośrodkowe sztucznego satelity wynosi

$$a_s = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

Natomiast siła ciężkości F określona prawem powszechnego ciążenia działająca na satelitę o masie m ze strony Ziemi nadaje mu przyspieszenie

$$F = G \frac{Mm}{R^2}$$

stąd

$$a = \frac{F}{m} = G \frac{M}{R^2}$$

tutaj M jest masą Ziemi, $M=5.98 \cdot 10^{24}$ kg

G jest stałą grawitacji, $G=6.67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²

Na powierzchni Ziemi $R=R_Z=6400$ km przyspieszenie sztucznego satelity wynosiłoby $9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

$$g = \frac{F}{m} = G \frac{M}{R_2^2}$$

stąd

$$\frac{a}{g} = \frac{R_2^2}{R^2}, \quad \text{kładąc } a = a_s \text{ mamy,}$$

$$\frac{4\pi^2 R}{T^2 g} = \frac{R_2^2}{R^2}$$

powierzchnią Ziemi

i stąd $R = 423000$ km – czyli wysokość sztucznego satelity nad
 $h = R - R_Z$ wynosi $h = 3590$ km.

Chcąc doprowadzić do tego, aby dowolne ciało krążyło stale dookoła Ziemi, należy je wznieść tak wysoko, aby ruchowi nie przeszkadzał opór powietrza, a następnie skierować je w przybliżeniu równoległe do powierzchni Ziemi.

Na ciało krążące po okręgu działa siła odśrodkowa

$$F = \frac{mv^2}{R}$$

Siła ta powinna równoważyć siłę przyciągania Ziemi

$$F_g = mg$$

Jeśli ciało ma znajdować się na wysokości h nad powierzchnią Ziemi, to z warunku, że przyśpieszenie siły ciężkości jest odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości

$$\frac{g}{g_0} = \frac{R_0^2}{(R_0 + h)^2} \quad \text{gdzie } g_0 = 9.81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

znajdujemy

$$F_g = m \cdot g_0 \frac{R_0^2}{(R_0 + h)^2} = m \frac{v^2}{(R_0 + h)}$$

oczywiście

$$R = R_0 + h$$

Więc

$$v = R_0 \sqrt{\frac{g_0}{R_0 + h}}$$

Dla $h \approx 0$, mamy $v = \sqrt{g_0 R_0}$ i kładąc $R_0 = 6370 \text{ km}$

Mamy $v \approx 7,9 \text{ km/s}$

(ale już na wysokości $h = 2000 \text{ km}$, $v = 6,9 \text{ km/s}$).

Powyższą prędkość zwaną pierwszą prędkością kosmiczną musi mieć sztuczny satelita krążący po orbicie kołowej tuż nad naszymi głowami (i na wysokości $h = 2000 \text{ km}$) aby nie spadł na Ziemię.

Drugą prędkością kosmiczną nazywamy prędkość jaką należy nadać rakiecie, aby mogła wydobyć się ze strefy przyciągania Ziemi. Tę prędkość wyznaczamy obliczając prędkość ciała o masie m oddalonego z powierzchni Ziemi do nieskończoności.

Obliczmy wykonaną pracę

$$praca = \frac{mv^2}{2} = \int_{R_0}^{\infty} mg dR$$

kładąc $\frac{g}{g_0} = \frac{R_0^2}{R^2}$, otrzymujemy

$$\frac{mv^2}{2} = \int_{R_0}^{\infty} mg_0 \frac{R_0^2}{R^2} dR$$

stąd

$$\frac{mv^2}{2} = mg_0 R_0^2 \int_{R_0}^{\infty} \frac{dR}{R^2}$$

i ostatecznie $v = \sqrt{2g_0 R_0}$

Dla Ziemi druga prędkość kosmiczna wynosi $v = 11,17$ km/s

Na zakończenie rozważań o ruchu ciał w polu grawitacyjnym przytoczmy prawa Keplera, rządzące ruchem planet oraz rozpatrzmy ruch ciała o zmiennej masie. Uzasadnienie i uogólnienie empirycznych praw uzyskanych przez Keplera na podstawie obserwacji astronomicznych, podał on na bazie zasad dynamiki i prawa powszechnego ciężenia Newtona.

I prawo Keplera

Każda planeta krąży po elipsie za Słońcem w jednym z jej ognisk.

II prawo Keplera

Promień wodzący każdej planety zakreśla równe pola w równych odstępach czasu.

III prawo Keplera

Kwadrat obiegu każdej planety wokół Słońca jest proporcjonalny do sześciianu półosi wielkiej elipsy.

Ruch ciała o zmiennej masie

Oznaczmy masę gazu wyrzucanego w czasie dt przez dm . Siła potrzebna do nadania tej masie prędkości w jest równa

$$F = w \frac{dm}{dt}$$

Z trzeciej zasady dynamiki wynika, że siła o tej samej wielkości, lecz przeciwnie skierowana, działa na raketę. Równanie ruchu rakiety ma więc postać

$$m \frac{dv}{dt} = w \frac{dm}{dt}$$

stąd

$$dv = w \frac{dm}{m}$$

Scałkujmy obustronnie

$$\int_v^{v_0} dv = - \int_{m_0}^m w \frac{dm}{m}$$

$$v - v_0 = w \ln \frac{m}{m_0} \text{ (wzór Ciołkowskiego)}$$

przy czym m_0 oznacza masę rakiety w chwili startu.

Z powyższego wzoru wynika, że prędkość rakiety v zależy od prędkości wyrzucanych gazów w oraz od stosunku mas m/m_0 . Masa wyrzucanych gazów $m_0 - m$ musi być tym większa, im większa jest masa końcowa. Z tego względu, najekonomicznym sposobem wyrzucania pojazdów kosmicznych jest użycie ракет wielostopniowych.

4.2.1. Ruch w polu elektrycznym

Podstawowym prawem opisującym oddziaływania elektromagnetyczne dwóch spoczywających w próżni (w układzie inercyjnym) materialnych punktów obdarzonych ładunkami Q_1 i Q_2 jest prawo Coulomba

$$\vec{F}_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (58)$$

gdzie: ϵ_0 jest przenikalnością elektryczną próżni.

Wielkość wektorowa \vec{E} zdefiniowana wzorem

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} \text{ wyznacza natężenie pola elektrycznego} \quad (59)$$

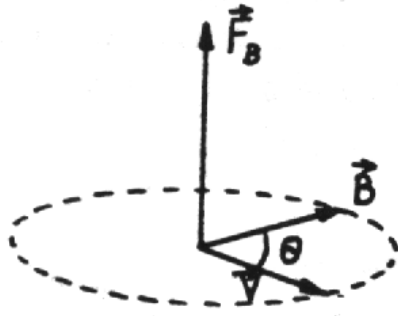
o wymiarze $[E] = \frac{[N]}{[C]}$

Jeżeli cząstka o ładunku Q porusza się w układzie inercyjnym z prędkością \vec{v} , to działa na tę cząstkę siła \vec{F}_B

$$\vec{F}_B = Q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Wektor \vec{B} nazywamy indukcją pola magnetycznego. Wymiarem indukcji pola magnetycznego jest

$$[B] = 1 \frac{[N] \cdot [s]}{[C] \cdot [m]} = 1[\text{tesla}] = 1[T]$$



Rys.29. Wektor \vec{F}_B zależy od kąta θ między wektorami \vec{v} i \vec{B} . Kierunek wektora \vec{F}_B wyznacza reguła prawej dłoni (reguła śruby prawoskrętnej).

W ogólnym przypadku, na cząstkę o ładunku Q , poruszającą się w układzie inercyjnym z prędkością \vec{v} , działa ze strony otoczenia siła wypadkowa \vec{F} , będąca wypadkową sił \vec{F}_E i \vec{F}_B (siły grawitacyjne możemy w przypadku cząstek elementarnych, poruszających się z prędkością bliską prędkości światła zaniedbać, ponieważ

$$\frac{F_B}{F_g} = \frac{QvB}{mg} = 10^8$$

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Siłę tę nazywamy siłą Lorentza.

- cząstka naładowana w jednorodnym stałym polu elektrycznym

Niech cząstka o masie m i ładunku Q znajduje się w jednorodnym stałym polu elektrycznym o natężeniu \vec{E} . Na tę cząstkę działa siła \vec{F}

$$\vec{F} = m\vec{a} = Q\vec{E}$$

stąd

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{Q}{m}\vec{E} \quad \text{oczywiście } \vec{a} = \text{const} \quad (60)$$

Całkując

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t \frac{Q}{m} E dt,$$

Otrzymujemy $v - v_0 = \frac{Q}{m} Et$ całkując ponownie

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t \left(\frac{Q}{m} Et + v_0 \right) dt$$

mamy

$$r - r_0 = \frac{Q}{2m} Et^2 + v_0 t$$

Ogólnym rozwiązaniem równania wektorowego (60) jest wektor

$$\vec{r} = \frac{Q}{2m} \vec{E} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

- **cząstka naładowana w jednorodnym zmiennym polu elektrycznym**

Przedstawmy wektor natężenia pola elektrycznego \vec{E} jako sinusoidalną funkcję czasu

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \omega t$$

gdzie: \vec{E}_0 jest amplitudą wektora natężenia pola elektrycznego,

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ jest częstością zmian pola elektrycznego.

Równania ruchu cząstki mają postać

$$\vec{a} = \frac{Q}{2m} \vec{E}_0 \sin \omega t$$

Całkując jak poprzednio, otrzymujemy

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \frac{Q}{m} \vec{E}_0 \cos \omega t$$

Jeśli $\vec{v} = 0$ dla $t = 0$, to $\vec{v}_0 = \frac{Q}{m} \vec{E}_0$

więc $\vec{v}_0 = \frac{QE_0}{m} (1 - \cos \omega t)$

Całkując ponownie, otrzymujemy

$$x = \frac{-QE_0}{m\omega^2} \sin \omega t + \frac{QE_0}{m\omega} t + x_0$$

4.2.2. Ruch w polu magnetycznym

Równanie ruchu cząstki naładowanej o masie m i ładunku Q w stałym polu magnetycznym o indukcji \vec{B} ma postać

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \frac{d \vec{v}}{dt} = Q(\vec{v} \times \vec{B})$$

stąd

$$\frac{d \vec{v}}{dt} = \frac{Q}{m} (\vec{v} \times \vec{B})$$

Jeśli indukcja pola magnetycznego ma kierunek osi z, to zgodnie z regułą iloczynu wektorowego

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \left[B \frac{dy}{dt}, -B \frac{dx}{dt}, 0 \right] =$$

$$= [Bv_y, Bv_x, 0]$$

stąd
$$v_x = \frac{Q}{m} v_y B \quad v_y = \frac{Q}{m} v_x B \quad v_z = 0 \quad (61)$$

Obliczmy energię kinetyczną tej cząstki

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \vec{v} \vec{v}$$

zmiana tej energii

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2} m (\vec{v} \vec{v})' = \frac{1}{2} m (\vec{v}' \vec{v} + \vec{v} \vec{v}') = m \vec{v}' \vec{v} =$$

$$= m \vec{v}' \left(\frac{Q}{m} (\vec{v} \times \vec{B}) \right) = 0$$

ponieważ wektor $\vec{v} \times \vec{B}$ jest prostopadły do wektora \vec{v} . Oznacza to, że energia kinetyczna cząstki jest stała. Pole magnetyczne nie zmienia energii kinetycznej cząstki swobodnej.

Jeśli energia kinetyczna E_k jest stała, to wektor prędkości \vec{v} jest też stały. Na tej podstawie przypuszczamy, że rozwiązaniem ruchu będzie ruch jednostajny po okręgu.

Niech rozwiązaniem tego ruchu będą równania

$$v_x = v \sin \omega t \quad v_y = v \cos \omega t \quad (62)$$

Równania te są równaniami okręgu, ponieważ

$$v_x^2 + v_y^2 = v^2 \sin^2 \omega t + v^2 \cos^2 \omega t = v^2$$

oraz
$$v_x = v \omega \cos \omega t \quad v_y = -v \omega \sin \omega t$$

Więc równania (61) można zapisać

$$v \omega \cos \omega t = \frac{QB}{m} v \cos \omega t \quad -v \omega \sin \omega t = -\frac{QB}{m} v \sin \omega t$$

stąd
$$\omega = \frac{QB}{m}$$

Tak wyznaczoną częstość kątową ruchu cząstki w polu magnetycznym nazywamy częstością cyklotronową (giroskopową) lub częstością Larmora.

Promień okręgu, po którym porusza się naładowana cząstka w jednorodnym polu magnetycznym, możemy wyznaczyć przyrównując wartość przyspieszenia dośrodkowego w ruchu po okręgu

$$\frac{mv^2}{r} \quad \text{z wartością siły } \vec{F}_B \quad (59)$$

Jeśli $v \perp B$ to $\vec{v} \times \vec{B} = vB \sin 90^\circ = vB$, wówczas

$$\frac{mv^2}{r} = Q \cdot v \cdot B$$

i stąd

$$r = \frac{mv}{QB}$$

Całkując równanie (62) otrzymujemy

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad \text{stąd} \quad \int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_x dt$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y \quad \text{stąd} \quad \int_{y_0}^y dy = \int_0^t v_y dt$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z \quad \text{stąd} \quad \int_{z_0}^z dz = \int_0^t v_z dt$$

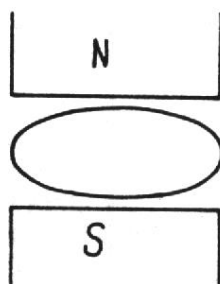
$$x - x_0 = \int_0^t v \sin \omega t dt \quad x = x_0 - \frac{v}{\omega} \cos \omega t$$

$$y - y_0 = \int_0^t v \sin \omega t dt \quad y = y_0 + \frac{v}{\omega} \cos \omega t$$

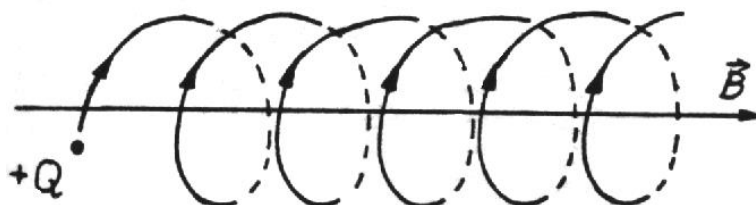
$$z - z_0 = \int_0^t v_z dt \quad z = z_0 + v_z t$$

Przyjmując, że $v_z = 0$ (ruch odbywa się w płaszczyźnie xy) to rozwiązaniem układu powyższych równań jest równanie okręgu o środku w punkcie x_0, y_0 i promieniu

$$r = \frac{v}{\omega} = \frac{vm}{QB} \quad (63)$$

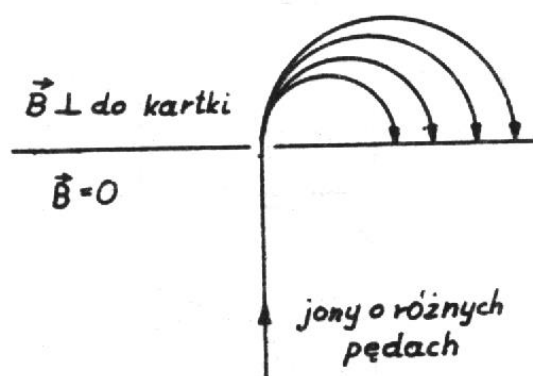


Rys.30. Ruch cząstek naładowanych w jednorodnym stałym polu magnetycznym natomiast jeśli składowa równoległa do wektora \vec{B} jest stała i różna od zera, to cząstka porusza się po spirali o stałym promieniu i o osi wzdłuż wektora \vec{B} – Rys.31



Rys.31. W jednorodnym stałym polu magnetycznym cząstka o ładunku $+Q$ porusza się po spirali wzdłuż wektora \vec{B}

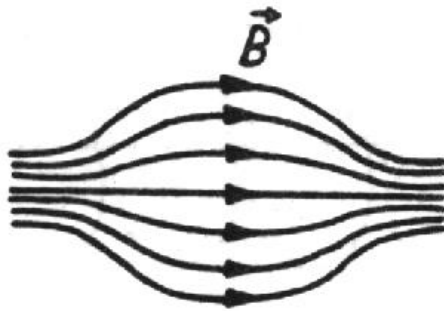
Ze wzoru (63) widzimy, że tory cząstek będą różne, chociaż cząstki posiadają taki sam ładunek Q i zakrzywane są w jednorodnym polu magnetycznym. Fakt ten wykorzystywany jest w selektorze pędów – Rys.32.



Rys.32. Pole magnetyczne jako selektor prędkości

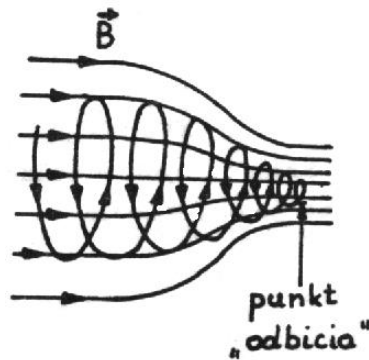
Jeśli składowa równoległa wektora \vec{B} do poruszających się naładowanych cząstek w pewnym miejscu wzrośnie, to ze wzoru (63) wynika, że zmniejszy się promień spirali. Dla pewnych wartości \vec{B} , \vec{v} i m następuje zmiana kierunku ruchu cząstek (następuje zjawisko odbicia) – Rys.33.

Jeśli niejednorodność pola magnetycznego będzie taka jak przedstawiono na Rys.34. , to otrzymujemy przypadek tzw. pułapki magnetycznej (butelki magnetycznej), w której ładunki elektryczne poruszają się z lewa na prawo i odwrotnie. Otrzymywana w chwili obecnej wysokotemperaturowa plazma jest właśnie w takich butelkach magnetycznych magazynowana.



Rys.34. Pułapka magnetyczna

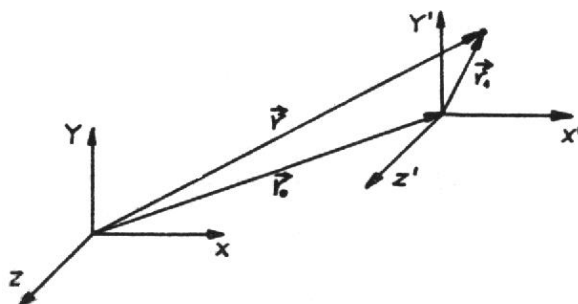
Stabilność pułapek magnetycznych jest obecnie rzędu ułamków sekund.



Rys.33. Zmiana kierunku ruchu cząstek naładowanych w niejednorodnym polu magnetycznym

4.3. Ruch w nieinercyjnym układzie odniesienia

Rozważmy układ inercyjny XYZ i nieinercyjny X'Y'Z' – Rys,35.



Rys.35. Układ inercyjny XYZ i nieinercyjny X'Y'Z'

Niech w układzie nieinercyjnym X'Y' porusza się punkt P o masie m. Ruch punktu P można rozpatrywać w układzie inercyjnym lub nieinercyjnym. Niech układ X'Y' porusza się względem układu XY ruchem postępowym z przyśpieszeniem a_0 . Jeśli punkt P ma w układzie inercyjnym przyśpieszenie a , to przyśpieszenie w układzie nieinercyjnym obliczymy z zależności

$$\vec{a}_1 = \vec{a} - \vec{a}_0 \quad (64)$$

Związek ten otrzymujemy po dwukrotnym zróżniczkowaniu wektora położenia punktu P

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_0 + \vec{r}_1 \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}_1}{dt} \end{aligned}$$

czyli

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$$

a następnie

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{v}_1}{dt}$$

stąd

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1$$

Mnożąc obustronnie (64) przez m, otrzymujemy

$$m\vec{a}_1 = m\vec{a} - m\vec{a}_0$$

lub

$$\vec{F}_1 = \vec{F} + \vec{F}_b$$

gdzie \vec{F} jest siłą działającą na punkt w układzie inercyjnym, \vec{F}_1 w układzie nieinercyjnym, natomiast $\vec{F}_b = -m\vec{a}_0$ jest siłą bezwładności (siłą pozorną) występującą w układzie nieinercyjnym.

Nazwa siła pozorna pochodzi stąd, że pojęcie siły wiąże się zawsze z oddziaływaniem otoczenia na cząstkę P, natomiast siła \vec{F}_b nie pochodzi od oddziaływania otoczenia na cząstkę P lecz wiąże się tylko z faktem, że układ X'Y' jest nieinercyjny.

O występowaniu siły bezwładności przekonujemy się często podczas jazdy pojazdem. Ruszający z miejsca (hamując), pojazd jest układem nieinercyjnym. Działa wówczas na nas siła bezwładności skierowana przeciwnie do zwrotu przyśpieszenia (kierunku ruchu pojazdu), powodująca zachowanie poprzedniego stanu ruchu, tj. spoczynku (odchylamy się do tyłu lub ruch do przodu), chociaż pojazd już się zatrzymał.

W ogólnym przypadku układ nieinercyjny X'Y'Z' porusza się względem układu inercyjnego XYZ ruchem postępowym z przyśpieszeniem \vec{a}_0 i ruchem obrotowym z prędkością kątową $\vec{\omega}$.

Prędkość punktu materialnego P, poruszającego się w układzie nieinercyjnym, liczona w układzie inercyjnym wynosi

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_1 + \vec{v}_1$$

gdzie \vec{v}_0 jest prędkością początku układu

$\vec{\omega} \times \vec{r}_1$ jest prędkością punktu P wskutek ruchu obrotowego

Wielkość $\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_1 = \vec{v}_u$ nazywamy prędkością unoszenia; związana jest ona z ruchem układu; natomiast wektor \vec{v}_1 jest prędkością punktu P mierzoną w układzie ruchomym.

Przyśpieszenie punktu materialnego P, poruszającego się w układzie nieinercyjnym, mierzona w układzie inercyjnym wynosi

$$\vec{a} = \vec{a}_0 - \omega^2 \vec{r}_1 + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_1 + \vec{a}_1 \quad (65)$$

Wielkość $\vec{a}_0 - \omega^2 \vec{r}_1 = \vec{a}_u$ nazywamy przyśpieszeniem unoszenia;

- wektor \vec{a}_0 jest przyśpieszeniem ruchu postępowego początku układu,
- $\omega^2 \vec{r}_1$ to przyśpieszenie dośrodkowe,
- $2\vec{\omega} \times \vec{v}_1 = \vec{a}_c$ nazywamy przyśpieszeniem Coriolisa,
- wektor \vec{a}_1 jest przyśpieszeniem punktu materialnego w układzie ruchowym.

Mnożąc wyrażenie (65) przez m i zakładając, że $\vec{a}_0 = 0$ (układ ruchomy jedynie obraca się z prędkością kątową ω), to

$$m\vec{a} = -m\omega^2 \vec{r}_1 + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_1 + m\vec{a}_1$$

lub

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_{odśr} + \vec{F}_{Cor} + \vec{F}_1$$

stąd w układzie ruchomym

$$\vec{F}_1 = \vec{F} + \vec{F}_{odśr} + \vec{F}_{Cor}$$

Siłę odśrodkową wykorzystujemy na skalę przemysłową w wirówkach (separatorach odśrodkowych). Wartość siły odśrodkowej jest w nich rzędu 10^5 razy większa od siły grawitacyjnej (pozostałe siły są znacznie mniejsze).

Na skutek wypadkowego działania siły grawitacyjnej, Coriolisa i odśrodkowej, wytrącone z położenia równowagi wahadło zmienia płaszczyznę wahań o kąt 2π (zakreślając figurę w kształcie rozety). Ta zmiana płaszczyzny wahań wahadła jest dowodem ruchu obrotowego Ziemi (wahadło Foucaulta).

Siła Coriolisa jest siłą pozorną, czyli siłą działającą na cząstkę w jej ruchu, względem układu obracającego się. Ziemia obraca się z prędkością kątową $\vec{\omega}$, a więc na przedmioty poruszające się po powierzchni Ziemi działa siła Coriolisa. Siła ta jest zawsze prostopadła do wektora \vec{v} i skierowana jest na półkuli północnej na prawo, a na południowej na lewo. Na półkuli północnej prawy brzeg jest bardziej podmyty, a na półkuli południowej – lewy.

Składowa styczna siły Coriolisa zależy od szerokości geograficznej ($F = 2m\omega v \sin\varphi$) i ma wartość największą na biegunach i znika na równiku. Składowa normalna siły Coriolisa zależy zarówno od szerokości geograficznej, jak i od kąta α między wektorami \vec{v} i składowej normalnej wektora $\vec{\omega}$ ($F = -2m\omega v \cos\varphi \sin\alpha$). Na równiku ($\varphi = 0$) ma wartość największą i znika na biegunach. Gdy na szerokości geograficznej φ ruch odbywa się wzdłuż równoleżnika ($\alpha = 90^\circ$), to w zależności od kierunku ruchu (na zachód lub na wschód), siła Coriolisa skierowana jest do środka Ziemi lub na zewnątrz powodując, że w pierwszym przypadku ciała są cięższe, a w drugim – lżejsze. Składowa normalna znika dla $\alpha = 0^\circ$ i 180° (ruch wzdłuż południków). Siła Coriolisa również wpływa na swobodny spadek ciała (ciała są odchylane na wschód) oraz występuje przy ruchu pionowym w górę (odchylenie na zachód). Na biegunie odchylenie nie występuje, a na równiku jest największe.

4.4. Zadania do rozdziału 4

- 4.4.1. Statek kosmiczny o masie $m = 10^6$ kg wznosząc się pionowo do góry osiągnął w ciągu $t = 15$ s wysokość 5 km. Znaleźć siłę ciągu silników, prędkość osiągniętą przez statek oraz przeciążenie znajdujących się w środku kosmonautów. Zaniedbać opór powietrza.
- 4.4.2. Młot o masie $m = 300$ kg spada z wysokości $h = 3$ m na stalowe kowadło. Znaleźć siłę uderzenia młota o kowadło, jeżeli uderzenie trwało $t = 0.02$ s. Czy siła uderzenia młota będzie inna, jeżeli po zderzeniu z kowadłem odskoczy on na wysokość 50 cm?
- 4.4.3. Na gładkiej poziomej płaszczyźnie znajduje się ciało o masie m . Druga masa zawieszona jest na nici przerzuconej przez blok i przyłączonej do masy m . Znaleźć przyspieszenie, z jakim poruszają się obie masy.
- 4.4.4. Na nici przerzuconej przez blok zawieszono dwie nierówne masy $M = 150$ g i $M + m = 200$ g. Znaleźć przyspieszenie mas, napięcie nici T i siłę F działającą na oś. Pominąć tarcie. Masę bloku i nici zaniedbać.
- 4.4.5. W windzie przymocowano wagę sprężynową, na której zawieszono ciało o masie $m = 1$ kg, oraz wahadło matematyczne o długości $l = 1$ m. Co będzie pokazywać waga oraz jaki będzie okres drgań wahadła matematycznego, jeśli winda rusza do góry z przyspieszeniem $a = 9.81$ m/s²; gdy winda rusza w dół z przyspieszeniem $a = 9.81$ m/s²?
- 4.4.6. Ile razy ciężar ciała na biegunie różni się od ciężaru na równiku? Zadanie rozwiązać dwoma sposobami:
- założyć, że Ziemia jest kulą
 - skorzystać ze wskazówki: wartość swobodnego przyspieszenia spadku na biegunie wynosi 9.83216 m/s², na równiku 9.78030 m/s².
- Wyjaśnić różnicę między otrzymanymi wynikami.
- 4.4.7. Dla zapewnienia połączenia telewizyjnego między dowolnymi punktami należy mieć trzy sputniki obracające się po orbicie kołowej w płaszczyźnie równika z zachodu na wschód. Wzajemna ich odległość względem siebie musi być równa 120°. Okres obrotu każdego ze sputników wynosi $T = 24$ h. Znaleźć promień orbity i prędkość liniową takich sputników.
- 4.4.8. Na jakiej wysokości musi krążyć sztuczny satelita Ziemi, aby znajdował się cały czas nad jednym i tym samym punktem Ziemi?
- 4.4.9. Znając czas obiegu Ziemi dookoła Słońca $T = 365.24$ dni słonecznych oraz średni promień orbity ziemskiej $R = 1.495 \cdot 10^{11}$ m obliczyć masę Słońca.

- 4.4.10. Znaleźć przyspieszenie grawitacyjne g_1 panujące na powierzchni planetoidy o średnicy $d = 30$ km, zakładając, że średnia gęstość planetoidy jest taka sama jak Ziemi. Średnica Ziemi jest równa $D = 12800$ km.
- 4.4.11. Odległość Ziemi i planety Wenus od Słońca wynoszą odpowiednio 1 A.U. oraz 0.72 A.U. Znaleźć stosunek ich liniowych prędkości w ruchu dookoła Słońca.
- 4.4.12. Rakieta, której masa początkowa jest $m_0 = 100$ kg startuje pionowo do góry. Znaleźć przyspieszenie z jakim porusza się rakieta po $t = 10$ s od chwili startu, jeżeli prędkość spalania paliwa rakiety wynosi 5 kg/s, a względna prędkość wylatujących produktów spalania wynosi $u = 1500$ m/s. Oporu powietrza nie uwzględniać.
- 4.4.13. Na łódce o masie $m = 200$ kg ustawiono specjalny silnik wyrzucający w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu łódki 1 kg wody w ciągu sekundy z prędkością 2 m/s względem łódki. Znaleźć prędkość łódki po upływie 10 minut od chwili rozpoczęcia ruchu. Oporu wody zaniedbać.
- 4.4.14. Jaki jest stosunek masy początkowej rakiety do jej masy w chwili, w której prędkość rakiety równa się 23 m/s? Względna prędkość produktów spalania równa się 10 m/s. Oporu powietrza i przyspieszenia sił ciężkości nie uwzględniać.
- 4.4.15. Jaką prędkość uzyskują elektrony w rurce próżniowej, jeśli do elektrod przyłożono napięcie $U = 10$ kV. Ładunek elementarny elektronu $e = 1.60 \cdot 10^{-19}$ As, masa elektronu $m = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg.
- 4.4.16. Elektron o energii kinetycznej 5 keV przebiega prostopadle do kierunku jednostajnego pola magnetycznego o natężeniu $H = 200$ Oe. Obliczyć promień koła zakreślonego przez biegnący w tym polu elektron. Ładunek elektronu oraz masa elektronu – patrz zadanie 4.31. Wskazówka 1 Oe = 79.6 A/m.
- 4.4.17. W próżniowej rurce, prostopadle do pola magnetycznego o $B = 0.0024$ T, wpada cząstka o masie m i ładunku Q . Napięcie pola elektrycznego $U = 45$ kV. Ekran znajduje się w odległości 2.5 m, gdzie obszar występowania pola magnetycznego wynosi 0.5 m. Odchylenie cząsteczki na ekranie wynosi $x = 3.7$ m. Oblicz stosunek Q/m .
- 4.4.18. Proton o prędkości początkowej $v = 3.85 \cdot 10^5$ m/s przechodzi przez komorę Wilsona, która znajduje się w polu magnetycznym o indukcji $B = 0.05$ Wb/m², porusza się po torze kołowym o promieniu $r = 8$ cm. Określić ładunek właściwy protonu.
- 4.4.19 W półkuli północnej i szerokości geograficznej $\varphi = 60^\circ$ z północy na południe płynie rzeka z prędkością $v = 2$ m/s. Znaleźć ciśnienie wywierane przez wodę na prawy brzeg rzeki, jeżeli jej szerokość wynosi 150 m.

- 4.4.20. Znaleźć prędkość wody w rzece płynącej na półkuli północnej z południa na północ, jeżeli na szerokości geograficznej $\varphi = 60^\circ$ każdy metr sześcienny wody działa na prawy brzeg tej rzeki siłą $F = 0.2 \text{ N}$.
- 4.4.21. Po torze biegnącym wzdłuż południka porusza się lokomotywa, z południa na północ z prędkością $v = 72 \text{ km/h}$ Wyznaczyć przyśpieszenie Coriolisa dla lokomotywy na szerokości geograficznej Warszawy $\varphi = 52^\circ$.

5. ZASADY ZACHOWANIA

5.1. Pęd i popęd

Niech w układzie inercyjnym w chwili $t = 0$ zostaje przyłożona siła F o stałej wartości i kierunku. Pod działaniem tej siły cząstka uzyska przyspieszenie

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

czyli

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m}$$

i po czasie t , prędkość cząstki wynosi

$$v = \int_0^t a dt = \int_0^t \frac{F}{m} dt = v_0 + \frac{F}{m} t \quad (66)$$

Z powyższego równania obliczamy czas t

$$t = (v - v_0) \frac{m}{F} \quad (67)$$

Scałkujemy ponownie równanie (66)

$$x = \int_0^t v dt = \int_0^t \left(v_0 + \frac{F}{m} t \right) dt = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 \quad (68)$$

przy czym x_0 i v_0 oznaczają odpowiednio położenie początkowe cząstki oraz jej prędkość początkową.

Podstawiając (67) do (68) otrzymujemy

$$x - x_0 = \frac{1}{2} \frac{m}{F} (v^2 - v_0^2)$$

lub

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = F(x - x_0) = W \quad (69)$$

Wyrażenie po prawej stronie definiuje zmianę energii kinetycznej cząstki pod działaniem siły F na drodze $x - x_0$. Wyrażenie po prawej stronie nazywamy pracą. W układzie SI jednostką pracy energii jest 1 dżul [1 J].

II zasadę dynamiki w przypadku, gdy nie ma sił $\vec{F} = 0$ zapisujemy

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \text{ czyli } \vec{p} = \text{const} \quad (70)$$

Powyższe równanie obowiązujące również w mechanice relatywistycznej stanowi zasadę zachowania pędu dla punktu materialnego (całka pędu).

W przypadku gdy działa siła \vec{F} , mamy równanie

$$\vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{F} dt$$

Wyrażenie po prawej stronie nazywamy popędem siły. Pojęcie popędu jest użyteczne w przypadku sił działających przez bardzo krótki okres czasu. O wielkości popędu możemy wnioskować z pędu uzyskanego przez ciało.

Siła \vec{F} może być w ogólności funkcją położenia i na przykład prędkości i czasu, czyli $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$. Mówimy, że siła \vec{F} jest potencjalna, a funkcję $V(\vec{r}, t)$ nazywamy potencjałem siły jeśli

$$\vec{F} = -gradV = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}\right) \quad (71)$$

Operator grad V (operator Hamiltona) – czytamy gradient skalaru V (zapisujemy również ∇V) i czytamy nabła V. Symbol ∇ możemy więc uważać za pewien wektorowy operator różniczkowy.

Jeśli potencjał nie zależy od czasu, czyli $V(\vec{r})$, to mówimy, że siła $\vec{F} = -gradV(\vec{r})$ jest zachowawcza (konserwatywna), a $V(\vec{r})$ nazywamy energią potencjalną punktu materialnego w położeniu \vec{r} w polu siły $\vec{F}(\vec{r})$.

5.2. Praca i moc

Jeżeli siła jest potencjalną, to wówczas iloczyn skalarny

$$\vec{F} \vec{ds} = F ds \cos[(\vec{F}, \vec{ds})]$$

stanowiący pracę siły \vec{F} na elemencie drogi \vec{ds} przyjmuje na podstawie (71) postać

$$\begin{aligned} \vec{F} \vec{ds} &= -gradV \vec{ds} = -gradV \frac{\vec{ds}}{ds} ds = \\ &= -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{ds}\right) ds = -\frac{\partial V}{\partial s} ds \end{aligned}$$

Obliczmy całkę z tego wyrażenia

$$W = \int_{r_0}^{r_1} \vec{F} \vec{ds} = -\int_{s_0}^s \frac{\partial V}{\partial s} ds = -[V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0)] = -E_p \quad (72)$$

a więc praca w polu siły zachowawczej nie zależy od kształtu drogi całkowania, a jedynie od końców $\vec{r}_0 = \vec{r}(s_0)$ i $\vec{r} = \vec{r}(s)$.

Pomnóżmy skalarnie przez \vec{dr} wyrażenie $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ (II zasadę dynamiki Newtona)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \vec{dr} = \vec{F} \vec{dr} \quad (73)$$

Zakładając, że $m = \text{const}$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{dr} = m d\vec{v} \frac{d\vec{r}}{dt} = m \vec{v} d\vec{v} = m \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) =$$

$$= d \left(\frac{mv^2}{2} \right) = dW \quad (74)$$

Jeśli wyrażenie $\frac{mv^2}{2}$ oznaczmy E_k (energiją kinetyczną), to (74) przyjmuje postać

$$dE_k = dW$$

stąd $dE_k + dE_p = 0$, a po scałkowaniu względem czasu

$$E_k + E_p = E \quad (75)$$

Powyższe równanie definiuje energię mechaniczną cząstki (jest całką energii) i stanowi treść zasady zachowania dla cząstki: podczas ruchu pod działaniem siły zachowawczej energia mechaniczna cząstki pozostaje stała.

Znajomość całki energii określa prędkość cząstki v jako funkcję jej położenia :

$$\frac{mv^2}{2} + E_p(r) = E \quad \text{i stąd} \quad v = \sqrt{\frac{2}{m} [E - E_p(r)]}$$

Moc P definiujemy jako szybkość zmiany energii w czasie, stąd

$$P = \frac{dW}{dt} \quad \text{ale} \quad dW = \vec{F} d\vec{r}$$

więc

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v} \quad (76)$$

Jednostką mocy jest $[1W] = \left[\frac{1J}{1s} \right]$

5.3. Moment siły, moment pędu

Pomnóżmy wektorowo obie strony równania $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ przez wektor wodzący \vec{r} cząstki P

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (77)$$

stąd

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} \right) + \left(\vec{r} \times \frac{d}{dt} (m\vec{v}) \right) =$$

$$= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v})$$

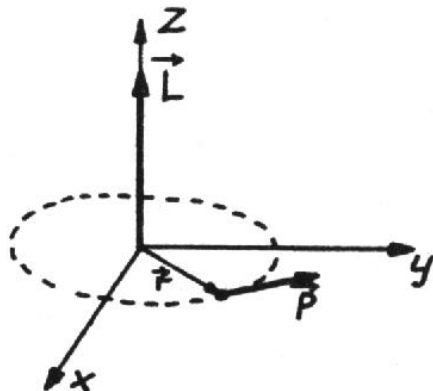
ponieważ $\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} = \vec{v} \times m\vec{v} = m\vec{v} \times \vec{v} = 0$

więc ostatecznie

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})$$

Wektor $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ nazywamy momentem pędu (krętem).

Kierunek i zwrot wektora momentu pędu określa reguła śruby prawoskrętnej – Rys.36.



Rys.36. Wektor \vec{L} nazywamy momentem pędu (krętem)

Wyrażenie $\vec{r} \times \vec{F}$ oznaczamy \vec{M} i nazywamy momentem siły. Jego kierunek i zwrot określa również reguła śruby prawoskrętnej.

Równanie (77) możemy więc zapisać w formie

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (78)$$

czyli szybkość zmian w czasie momentu pędu cząstki, względem dowolnego punktu, jest równa momentowi siły działającemu na tę cząstkę, względem tego samego punktu.

Jeżeli moment siły $\vec{M} = 0$, wówczas $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ i $\vec{L} = const$. Stwierdzenie, że moment pędu jest stały gdy nie działa zewnętrzny moment siły, nazywamy zasadę zachowania momentu pędu.

Zasada ta odnosi się zarówno do cząstek znajdujących się na orbitach zamkniętych, otwartych oraz do zderzeń.

5.4. Ruch w polu centralnej siły zachowawczej

Bardzo ważnym i często spotykanym przypadkiem ruchu jest ruch w polu zachowawczym siły centralnej.

Całą pierwszą równania ruchu jest zasada zachowania energii.

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + E_p(x) = E = const \quad (79)$$

W analizie matematycznej dowodzi się, że ogólnym rozwiązaniem powyższego równania jest

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (80)$$

Wielkości r i θ charakteryzują odpowiednio radialny i kątowy ruch radialny cząstki.

Równanie (80) przedstawia, zależności od wielkości e zwanej mimośrodem, cztery typy możliwych krzywych:

gdy $e = 0$, równanie (80) przedstawia okrąg, $E < 0$

$0 < e < 1$, równanie (80) przedstawia elipsę, $E > 0$

$e = 1$, równanie (80) przedstawia parabolę, $E = 0$

$e > 1$, równanie (80) przedstawia hiperbolę, $E > 0$

W przypadku ruchu po elipsie, parametr p związany jest z dużą półosią (a) i małą półosią (b) zależnościami:

$$a = \frac{p}{1-e^2} \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$$

Kładąc we wzorze (119) $\theta=0$ oraz $\theta=\pi$ otrzymujemy

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e} \quad \text{i} \quad r_{\max} = \frac{p}{1-e}$$

lub

$$r_{\min} = a(1-e) \quad \text{oraz} \quad r_{\max} = a(1+e)$$

5.5. Energia i pęd w teorii relatywistycznej

5.5.1. Pęd relatywistyczny

Podstawą dynamiki relatywistycznej jest sformułowania przez A. Einsteina zasada względności oraz przez Bohra – zasada korespondencji. Zasada względności Einsteina formułowana jest następująco: opis wszystkich zjawisk fizycznych jest jednakowy we wszystkich układach inercjalnych. Wykrycie spoczynku lub ruchu jednostajnie prostoliniowego jest niemożliwe przez obserwację dowolnego zjawiska fizycznego oraz, że wszystkie prawa fizyki są niezmiennie względem transformacji Lorentza.

Zasada korespondencji Bohra orzeka, że mechanika relatywistyczna w przypadku małych wartości prędkości ciał musi dawać te same wyniki co mechanika Newtona.

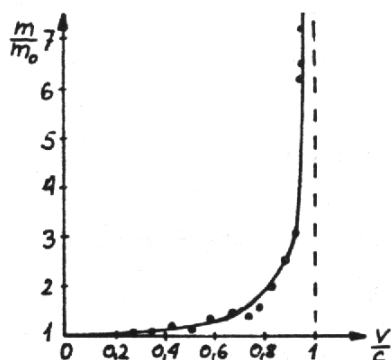
Przyjęcie zasady względności Einsteina (wszystkie prawa fizyki są niezmiennicze względem transformacji Lorentza) powoduje, że aby zachować słuszność zasady zachowania pędu należy przyjąć hipotezę zmiennej masy dla dowolnych układów inercjalnych.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (81)$$

Pęd wobec tego wyrażamy w mechanice relatywistycznej wzorem

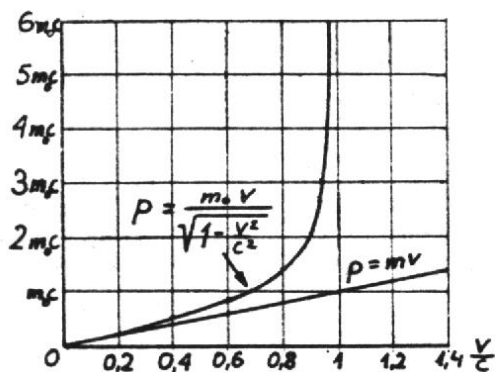
$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (82)$$

Wartość pędu relatywistycznego zdefiniowanego wzorem (82) oraz pędu nierelatywistycznego (klasycznego) zdefiniowanego wzorem $p = mv$ przedstawiono na Rys. 37.



Rys.37. Relatywistyczny wzrost masy (linia ciągła) oraz bezpośrednie pomiary (punkty)

Wielkość m_0 nazywamy masą spoczynkową. Jest to wartość masy, jaką ma ciało przy prędkości $v = 0$. Zmianę masy można zaobserwować dopiero przy prędkościach relatywistycznych, osiągalnych przez cząstki rozprędzone wysokimi napięciami. Pomiary masy elektronów przy różnych prędkościach doskonale potwierdzają przewidywania szczególnej teorii względności – Rys. 38.



Rys.38. Pęd relatywistyczny i pęd klasyczny

5.5.2. Energia relatywistyczna

Pomnóżmy skalarnie obie strony wyrażenia $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ przez

wektor \vec{dr}

$$\vec{F} \vec{dr} = \frac{d\vec{p}}{dt} \vec{dr}$$

Wyrażenie $\vec{F} \vec{dr}$ jest pracą siły \vec{F} przy przesunięciu \vec{dr} . Przyjmijmy, że równa się ona zmianie energii kinetycznej dE_k

$$dW = dE_k = \frac{d\vec{p}}{dt} \vec{dr} = \vec{dp} \vec{v} = \vec{v} d(m\vec{v})$$

Całkując obustronnie powyższe równanie, otrzymujemy

$$\begin{aligned} W = E_k &= \int_0^v \vec{v} d(m\vec{v}) = \vec{v} m \vec{v} \Big|_0^v - \int_0^v m \vec{v} d\vec{v} = \\ &= mv^2 - \int_0^v \frac{m_0 v dv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mv^2 - \frac{m_0 c^2}{2} \int_0^v \frac{d\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \\ &= mv^2 + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - m_0 c^2 = \\ &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = mc^2 - m_0 c^2 \end{aligned}$$

Energia całkowita cząstki E wynosi więc

$$E = E_k + m_0 c^2 \quad (83)$$

lub

$$E = E_k + E_0$$

Wielkość $E_0 = m_0 c^2$ nazywamy energią spoczynkową cząstki. Interpretuje się ją jako energię potencjalną cząstki.

$$\text{Wyrażenie } \Delta E = (\Delta m)c^2$$

interpretujemy następująco: każdej zmianie masy bezwładnej musi odpowiadać zmiana energii całkowitej cząstki.

Bardzo ważną zależnością stosowaną w fizyce jądrowej jest zależność między energią całkowitą a pędem. Związek ten otrzymujemy po następujących przekształceniach.

Podnieśmy obustronnie do kwadratu wyrażenia (81) i wyznaczmy wielkość m_0^2

$$m_0^2 = m^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

stąd

$$m_0^2 c^4 = m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2 \quad (84)$$

Przyjmując oznaczenia (83) oraz wiedząc, że $p = mv$, mamy

$$E_0^2 = E_c^2 - p^2 c^2 \quad (85)$$

W mechanice relatywistycznej dowodzi się, że prawa strona powyższej równości jest niezmienna (jest inwariantem) względem transformacji Lorentza, stąd wynika, że masa spoczynkowa lub energia spoczynkowa jest inwariantem w mechanice relatywistycznej.

Energia i pęd transformują się podobnie jak współrzędne x, y, z, t . Związki transformacyjne (bez wyprowadzenia i przy założeniach poczynionych w 5.5.1) pędu i energii są następujące:

$$p'_x = \frac{p_x - \frac{v}{c^2} E}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$p'_y = p_y \quad (86)$$

$$p'_z = p_z$$

$$E' = \frac{E - vp_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Powszechnie używaną jednostką energii w fizyce jądrowej jest 1 elektronowolt (1eV). Jest to taka ilość energii kinetycznej jaką uzyskuje elektron napędzony w polu elektrycznym o różnicy potencjałów 1V. Między powyższą jednostką energii (pracy), a jednostką energii (pracy) w układzie SI – dżulem – istnieje zależność

$$1\text{eV} = 1.602191 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Jeśli przyjmiemy $c = 1$, wówczas ze związków (85) oraz (83) otrzymujemy, że pęd, masę i energię można wyrazić w tych samych jednostkach – eV.

Inną jednostką masy używaną w fizyce jądrowej jest jednostka masy atomowej (u). Jest ona równa $\frac{1}{12}$ części masy węgla $^{12}_6\text{C}$

$$1 \text{ u} = 1.66043 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 931.478 \text{ MeV}$$

5.6. Efekt Dopplera w fizyce klasycznej i relatywistycznej

Zgodnie z postulatem Plancka, energię fotonu obliczamy zależnością $E = h\nu$, natomiast pęd $p = \frac{h}{\lambda}$, gdzie $\nu = \frac{c}{\lambda}$. Podstawmy te wielkości do pierwszego ze wzorów transformacyjnych 86:

$$\frac{h}{c} \nu = \frac{\frac{h}{c} \lambda - \frac{\nu}{c^2} h}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Upraszczając, otrzymujemy

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{lub} \quad \nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \quad (87)$$

Otrzymana formuła (jest to przypadek oddalającego się źródła od nieruchomego obserwatora) przedstawia relatywistyczny wzór Dopplera. Częstotliwość odbierana ν' jest mniejsza (87), a w przypadku odwrotnym, (88) większa od częstotliwości drgającego źródła ν .

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \quad (88)$$

Między częstotliwością ν , a długością fali λ istnieje tzw. związek dyspersyjny

$$k = \frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda}$$

wielkość k nazywamy liczbą falową.

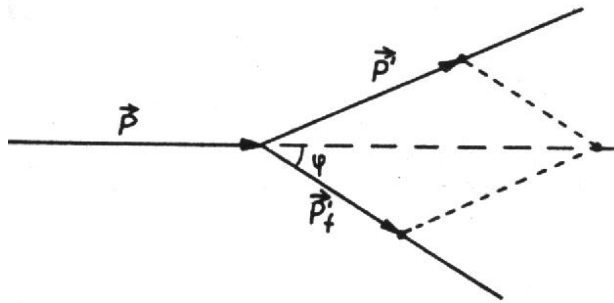
Obliczona wzorem (87) prędkość oddalania się źródła drgającego wynosi

$$\frac{1}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$$

i stąd po przekształceniach $v = c \frac{\lambda'^2 - \lambda^2}{\lambda'^2 + \lambda^2}$

Obecnie obserwujemy dla bardzo odległych galaktyk („ucieczka galaktyk”) $v \approx 0.3c$, oznacza to, że np. „niebieska” linia serii Balmera wodoru H_β ($\lambda = 4861 \text{ \AA}$) jest obserwowana w części „czerwonej” widma ($\lambda' = 6624 \text{ \AA}$). Zjawisko to nazywamy potocznie „poczerwienieniem” galaktyk.

Oprócz „podłużnego” zjawiska Dopplera występuje przewidziany szczególną teorią względności efekt „poprzeczny” – Rys.39.



Rys.39. „Poprzeczny” efekt Dopplera.

Niech poruszający się atom emituje foton. Prawa zachowania pędu i energii w tym procesie

$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}'_f$$

$$E = E' + cp'_f$$

gdzie: \vec{p} - pęd atomu przed emisją kwantu

\vec{p}'_f - pęd fotonu emitowanego przez poruszający się atom

\vec{p}'_E - pęd atomu po emisji kwantu

E - energia całkowita atomu przed emisją kwantu

E' - energia całkowita atomu po emisji

cp'_f - energia fotonu

prowadzą do rezultatu

$$v = v_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi}$$

Dla $\varphi = 90^\circ$ („poprzeczne” zjawisko Dopplera) otrzymujemy

$$v' = v_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Rezultat ten został doświadczalnie potwierdzony, co jest potwierdzeniem słuszności szczególnej względności (w mechanice klasycznej „poprzeczny” efekt Dopplera nie występuje).

Na zakończenie tego paragrafu rozpatrzmy zjawisko Dopplera w przypadku gdy $\frac{v}{c} \ll 1$ (klasyczny przypadek).

Niech źródło fal zbliża się do obserwatora z prędkościami v , prędkość rozchodzenia się fal wynosi c . W ciągu okresu T , fala wysyłana przez źródło (nieruchome) przebywa drogę $\lambda = cT$, natomiast gdy źródło to porusza się z prędkością v , to fala w tym samym czasie przebędzie drogę

$$\lambda' = \lambda - vT$$

ale $\lambda' = \frac{c}{v'}$, $\lambda = \frac{c}{v}$, oraz $T = \frac{1}{v}$

więc $\frac{c}{v'} = \frac{c}{v} - \frac{v}{v}$

czyli

$$v' = \frac{v}{1 - \frac{v}{c}} \quad \text{lub} \quad v' \approx v \left(1 + \frac{v}{c}\right) \text{ dla } \frac{v}{c} \ll 1$$

Gdy źródło oddala się

$$\lambda' = \lambda + vT$$

i wówczas

$$v' = \frac{v}{1 + \frac{v}{c}} \quad \text{lub} \quad v' \approx v \left(1 - \frac{v}{c}\right) \text{ dla } \frac{v}{c} \ll 1$$

5.7. Zderzenia sprężyste i niesprężyste kul

Bardzo użytecznym narzędziem badań własności oddziałujących ciał, zarówno w makroświecie jak i w mikroświecie, są zderzenia. Zachodzą one w skończonym czasie; w przypadku zderzeń jądrowych czas ten jest rzędu 10^{-23} s, a w przypadku zderzeń „grawitacyjnych”, rozumianych jako zakreślenie w pobliżu Słońca orbity hiperbolicznej przez kometę, czas ten jest rzędu 10^9 s.

W wyniku zderzeń następuje zmiana stanu ruchu tych ciał, na skutek wymiany pędu i energii między nimi. W czasie zderzenia siły zewnętrzne są zwykle znacznie mniejsze od sił zderzeniowych i dlatego można je zaniedbać. Zaniedbujemy również odkształcenia ciał występujące w czasie zderzeń. Zderzenia dzielimy na:

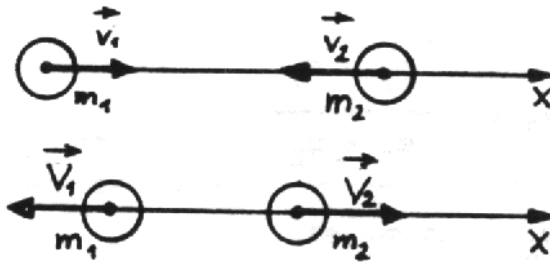
- sprężyste (elastyczne) w tym przypadku możemy stosować zasadę zachowania pędu i energii
- niesprężyste (nieelastyczne) zachowuje się jedynie pęd.

W zależności od tego, czy całkowita energia kinetyczna ciał po zderzeniu jest mniejsza lub większa od ich całkowitej energii kinetycznej przed zderzeniem, to takie zderzenie nazywamy niesprężystymi I rodzaju (pochłonięcie energii) lub II rodzaju (wydziela się energia).

Ruch zderzających się ciał odnosimy zawsze do pewnego układu odniesienia, określając względem tego układu położenie i prędkość poszczególnych ciał. Układem tym może być układ laboratoryjny, to jest układ, w którym jedna z cząstek spoczywa, lub na przykład bardzo wygodny do opisu zjawisk układ, w którym całkowity pęd przed zderzeniem jest równy zeru.

Odpowiada to przypadkowi, gdy obie zderzające się cząstki poruszają się ku sobie z równymi i przeciwnie skierowanymi pędami. Układ taki nazywamy układem środka masy.

Oznaczmy masy zderzających się kul przez m_1, m_2 , ich prędkości przed zderzeniem odpowiednio \vec{v}_1, \vec{v}_2 , po zderzeniu \vec{V}_1, \vec{V}_2 . Rozpatrzmy centralne zderzenie sprężyste – Rys.40. – to jest takie zderzenie, dla którego środki mas zderzających się kul poruszają się wzdłuż tej samej prostej, a ciała nie uległy wskutek zderzenia odkształceniu.



Rys. 40. Centralne zderzenie sprężyste

Napiszmy zasadę zachowania pędu i zasadę zachowania energii

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2}$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$m_1(v_1 - v_1) = m_2(V_2 - V_2)$$

$$m_1(v_1^2 - v_1^2) = m_2(V_2^2 - V_2^2)$$

Po podzieleniu stronami drugiego równania przez pierwsze otrzymujemy

$$v_1 + V_1 = V_2 + v_2 \quad \text{gdy} \quad \begin{matrix} v_1 \neq V_1 \\ V_2 \neq v_2 \end{matrix}$$

To równanie, oraz zasada zachowania pędu

$$V_1 - V_2 = v_2 - v_1$$

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

Umożliwia nam wyznaczenie prędkości końcowych zderzających się kul.

$$V_1 = -\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \quad (89)$$

$$V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

W przypadku gdy $m_1 = m_2$ otrzymujemy

$$V_1 = v_2, \quad V_2 = v_1 \text{ nastąpiła wymiana prędkości kul}$$

W przypadku, gdy $m_2 = \infty$, oraz $v_2 = 0$, to jest kula o masie m_1 zderza się z nieruchomą ścianą, wzory (89) dają

$$V_1 = -\frac{1 - \frac{m_1}{m_2}}{1 + \frac{m_1}{m_2}} v_1 + \frac{2}{1 + \frac{m_1}{m_2}} v_2$$

(90)

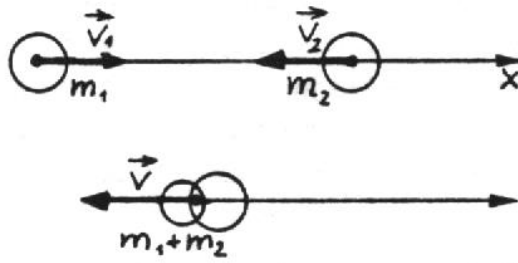
$$V_2 = -\frac{2 \frac{m_1}{m_2}}{1 + \frac{m_1}{m_2}} v_1 + \frac{1 - \frac{m_1}{m_2}}{1 + \frac{m_1}{m_2}} v_2$$

Wzory (90) otrzymano ze wzorów (89) po podzieleniu licznika i mianownika przez m_2 , aby uniknąć nieoznaczoności, więc

$$V_1 = -v_1 \quad \text{i} \quad v_2 = 0$$

to jest kula odskakuje od nieruchomej ściany z prędkością, jaką miała przed zderzeniem i przeciwnie skierowaną.

Na Rys.41. przedstawiono centralne zderzenie niesprężyste. Po zderzeniu kule poruszają się razem, odkształcenia są trwałe.



Rys. 41. Centralne zderzenie niesprężyste

Zasada zachowania pędu w tym procesie daje

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

stąd prędkość końcowa kul po zderzeniu wynosi

$$v = -\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Gdy zderzające się kule mają równe masy $m_1 = m_2$ i $v_1 = -v_2$ to $v = 0$, to jest kule zatrzymały się.

Ich energie kinetyczne zamieniły się na ciepło.

Stratę energii kinetycznej podczas zderzenia niesprężystego obliczymy wyznaczając różnicę

$$\Delta E_k = E_k \text{ (przed zderzeniem)} - E_k \text{ (po zderzeniu)}$$

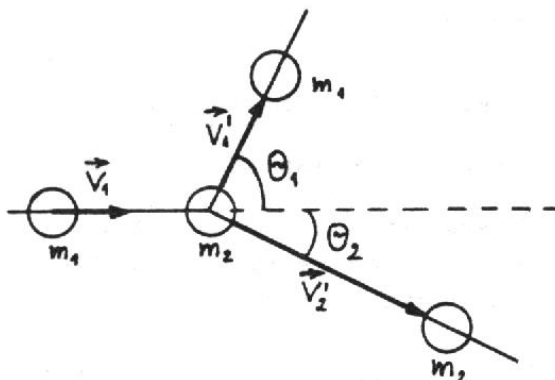
stąd

$$\Delta E_k = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)}{2} \left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2$$

Zderzenia niesprężyste (nieelastyczne) II rodzaju, dla których $(m_1 + m_2 - \sum_i m_i) c^2 > 0$ mogą zachodzić zawsze, to jest przy dowolnie małej energii kinetycznej zderzających się cząstek.

Gdy $(m_1 + m_2 - \sum_i m_i) c^2 < 0$, czyli gdy mamy do czynienia ze zderzeniami niesprężystymi I rodzaju, to w związku z faktem, że w mikroświecie, zderzające się cząstki posiadają skwantowane masy (to jest masy spoczynkowe posiadają tylko określone wartości), wobec tego każde zderzenie niesprężyste charakteryzuje się pewną określoną wartością energii kinetycznej. Tę energię kinetyczną, powyżej której mogą zachodzić zderzenia niesprężyste I rodzaju nazywamy energią progową. Przykładowo, w oddziaływaniach silnych protonu z protonem, energią progową zderzeń niesprężystych I rodzaju jest energia o wartości 135 MeV. Poniżej tej energii, zderzenie protonów jest zderzeniem sprężystym.

Rozpatrzmy jeszcze przykład zderzenia sprężystego przedstawionego na Rys.42. Kula poruszająca się z prędkością v_1 i masie m_1 , zderza się ze spoczywającą kulą $v_2 = 0$ o masie m_2 i odskakuje pod kątem θ_1 . W jakim kierunku i z jaką prędkością będzie poruszać się druga kula?



Rys.42. Niecentralne zderzenie sprężyste

Przed zderzeniem składowe x i y pędu były równe

$$p_x = m_1 v_1 \quad p_y = 0$$

Te wielkości muszą być zachowane po zderzeniu oddzielnie.

Z Rys. 42 .mamy

$$m_1 v'_1 \cos \theta_1 + m_2 v'_2 \cos \theta_2 = m_1 v_1$$

$$m_1 v'_1 \sin \theta_1 - m_2 v'_2 \sin \theta_2 = 0$$

Trzecim równaniem umożliwiającym wyznaczenie v'_1 , v'_2 , θ_2 jest zasada zachowania energii

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$$

Rozwiązanie ogólne tego układu równań jest dość skomplikowane, a w przypadku gdy $m_1 = m_2$ i jedna z tych cząstek jest spoczywająca, to zawsze $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$

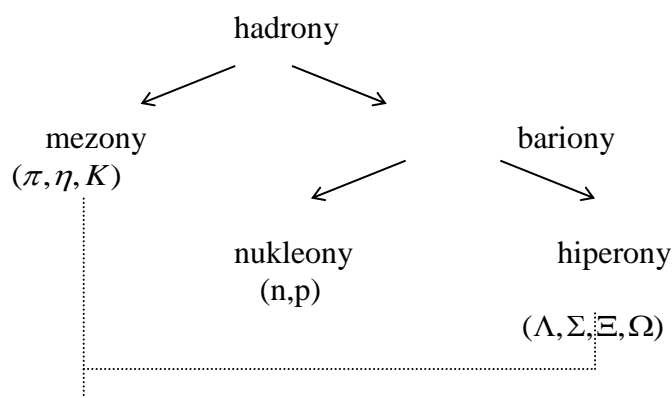
5.8. Zasady zachowania cząstek dla elementarnych

Mimo, iż nie potrafimy podać ścisłej definicji co rozumiemy pod pojęciem cząstki elementarnej, mimo iż teoria cząstek elementarnych jest dopiero tworzona, to fizyka współczesna operuje dość dobrze określonym modelem cząstki elementarnej.

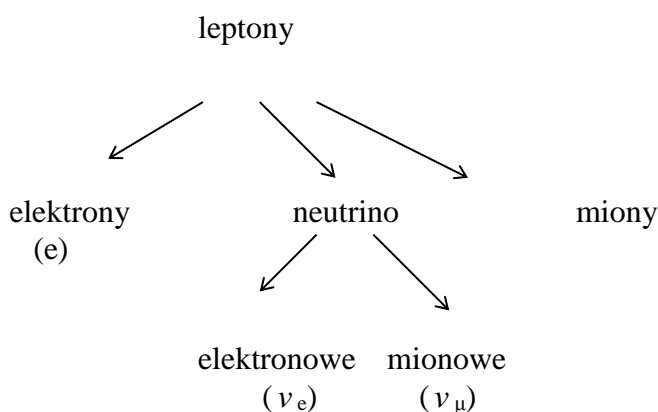
Podstawową cechą cząstki elementarnej jest to, że nieprzerwanie oddziałuje ona na inne cząstki. Pojedyncza cząstka nieustannie emituje i pochłania inne cząstki. Emitowane i pochłaniane cząstki tworzące jakby „chmurę” wokół rozważanej cząstki elementarnej nie mogą być przez nas zaobserwowane ze względu na niespełnienie prawa zachowania pędu i energii. Noszą one nazwę „wirtualnych” („możliwych”). Uważamy, że jeśli owe cząstki „wirtualne” są naładowane elektrycznie, to chmura ma pewną przestrzenną strukturę ładunkową, którą możemy następnie interpretować jako strukturę elektromagnetyczną całej cząstki. Oddziaływanie cząstek wiąże ze sobą pewną energię, a ta z kolei poprzez związek $E = mc^2$ ma wpływ na jego masę. Samo oddziaływanie cząstek wirtualnych ma więc również wpływ na masę cząstki elementarnej. Wewnątrz chmury wirtualnych cząstek być może znajduje się wyróżniona część centralna („rdzeń”). Oddziaływanie cząstek może być traktowana jako wymiana „wirtualnych cząstek”. Przedstawiony tu model cząstki elementarnej jest oczywiście tylko modelem pozwalającym na jakościowe zrozumienie jego budowy i jej oddziaływań, wszelkie ilościowe rozważania napotykać jeszcze wielkie trudności.

Przeglądając powiększającą się nieustannie tablicę cząstek elementarnych odczuwa się potrzebę znalezienia wśród nich porządku, pewnych prawidłowości, pewnych zasad zachowania dla cząstek elementarnych. Istnieje wiele systemów klasyfikacyjnych, np. ze

względu na wielkość masy, czasu „życia” cząstek, ładunek, trwałość, rodzaj oddziaływań, itd.
 . Poniżej przedstawiono podział cząstek elementarnych ze względu na rodzaj oddziaływań.



cząstki dziwne
 (kaony i hiperony)



Najogólniej cząstki elementarne dzielimy na cztery grupy: rodzinę fotonów (tylko jedna cząstka – nazwa pochodzi od greckiego słowa „świecący”), rodzinę leptonów („drobny, lekki”), rodzinę mezonów („środkowy”), oraz rodzinę barionów („ciężki”). Rodzinę barionów tworzą nukleony („ziarna, jądro”) oraz hiperony („nad, powyżej”). Ze względu na rodzaj oddziaływań, cząstki dzielimy na hadrony i leptony.

Hadrony, to grupa cząstek elementarnych oddziałujących silnie. Do nich zaliczamy mezony o spinie całkowitym (cząstki o spinie całkowitym nazywamy bozonami) oraz bariony – (cząstki o spinie półowkowym – fermiony). Bariony z kolei dzielimy na nukleony oraz hiperony. Cząstki oddziałujące słabo nazywamy leptonami. Są to elektrony, neutrina (elektronowe i mionowe) oraz miony (w części literatury nazywane są one miounami). Leptony są fermionami. Do bozonów zaliczamy również cząstkę γ (foton).

Antycząstki (oznaczone kreską poziomą nad symbolem cząstki) zgodnie z obecnym poglądem, posiadają oczywiście antycząstki obojętne.

Cząstki elementarne obserwujemy zawsze w procesie oddziaływań z innymi cząstkami. Podstawową metodą badawczą są zderzenia (odbywa się to w komorach pęcherzykowych, komorach Wilsona) i ich analiza.

Procesy związane z oddziaływaniami silnymi przebiegają bardzo szybko (procesy szybkie) od 10^{-21} do 10^{-24} s, oddziaływania elektromagnetyczne przebiegają w czasie od 10^{-15}

do 10^{-17} s. Procesy powolne zachodzące w czasie od 10^{-6} do 10^{-10} s dotyczą oddziaływań słabych. Poszczególne grupy cząstek biorą udział na ogół tylko w niektórych rodzajach oddziaływań: leptony – w elektromagnetycznych i słabych, fotony – w elektromagnetycznych, mezony i bariony – w elektromagnetycznych, słabych i silnych.

Cząstki trwałe mają określone masy. Dla cząstek nietrwałych z uwagi na zasadę nieoznaczoności Heisenberga, można podać (rozmytą” masę (tzw. szerokość połówkową). Stan cząstki elementarnej charakteryzujemy pewnymi liczbami kwantowymi. W układzie w którym cząstka spoczywa, możemy ją scharakteryzować podając pewne liczby: masy (m), ładunek (Q), liczby barionowej (B), liczby leptonowej (L), spin (J), dziwności (S), parzystości ładunkowej (C), izospinu (I), trzeciej składowej izospinu (I_3), hiperładunku (Y), izoparzystości (G) oraz momentu magnetycznego (μ).

Pewne wielkości fizyczne są bezwzględnie zachowywane w procesach, w których dane cząstki biorą udział. Są to: pęd, energia, moment pędu, liczna barionowa B , liczba leptonowa L i ładunek Q , inne procesy są w danych oddziaływaniach albo zabronione albo możliwe.

Aby przekonać się, czy dany proces jest możliwy do zaobserwowania, lub czy jest procesem zabronionym, należy poznać zasady zachowania cząstek.

Liczbę barionową $B = +1$ przypisujemy barionom, antybarionom przypisujemy $B = -1$, $B = 0$ przypisujemy wszystkim pozostałym cząstkom. Liczby leptonowe elektronowe i mionowe (które muszą być w procesach rozpadu lub zderzeń zachowane oddzielnie) przedstawia Tabela 5.1:

Tabela 5.1.

Cząstka antycząstka	Leptonowa liczba kwantowa L	Elektronowa liczba kwantowa L _e	Mionowa liczba kwantowa L _μ
e ⁻	+1	+1	0
e ⁺	-1	-1	0
ν _e	+1	+1	0
$\bar{\nu}_e$	-1	-1	0
μ ⁻	0	0	+1
μ ⁺	+1	0	+1
ν _σ	-1	0	-1
ν _μ	+1	0	+1
$\bar{\nu}_\mu$	-1	0	-1

Przykładowo, mion μ⁻ rozpada się wg schematu (Tabela 5.1.)

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$$

Korzystając z tablicy 5.1., mamy

$$L : +1 = +1 + 1 - 1$$

$$L_e : 0 = +1 - 0 - 1$$

$$L_\mu : +1 = 0 + 1 + 0$$

$$Q : -1 = -1 + 0 + 0$$

Stąd wynika, że rozpad ten będzie obserwowany.

W poniższych rozpadach jest zachowana liczba barionowa; te rozpady będą więc obserwowane

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (\text{rozpad } \beta^-)$$

$$L : 0 = 0 + 1 - 1$$

$$L_e : 0 = 0 + 1 - 1$$

$$L_\mu : 0 = 0 + 0 + 0$$

$$B : +1 = +1 + 0 + 0$$

$$Q : 0 = +1 - 1 + 0$$

$$p \rightarrow n + e^+ + \bar{\nu}_e \quad (\text{rozpad } \beta^+)$$

$$L : 0 = 0 - 1 + 1$$

$$L_e : 0 = 0 - 1 + 1$$

$$L_\mu : 0 = 0 + 0 + 0$$

$$B : +1 = +1 + 0 + 0$$

$$Q : +1 = 0 + 1 + 0$$

Natomiast dla poniższego procesu zderzenia

$$p + \pi^+ \rightarrow \Sigma^+ + \pi^+$$

$$L : 0 + 0 = 0 + 0$$

$$L_e : 0 + 0 = 0 + 0$$

$$L_\mu : 0 + 0 = 0 + 0$$

$$B : +1 + 0 = +1 + 0$$

$$Q : +1 + 1 = +1 + 1$$

mimo spełnienia powyższych zasad zachowania, procesu tego nie obserwuje się. Dla podobnych procesów należało wprowadzić liczbę kwantową zwaną dziwnością (S). Zasada zachowania dziwności musi być spełniona zawsze we wszystkich silnych oddziaływaniach.

Hiperony zaliczamy do cząstek oddziałujących silnie, jednak czasy rozpadów są charakterystyczne dla oddziaływań słabszych. Dla takich rozpadów dziwność nie jest zachowana, a cząstki takie nazywamy dziwnymi.

Tabela 5.2. „Dziwność” stabilnych hadronów

Ładunek Q S Dziwność	e ⁺	0	e ⁻
+3	$\bar{\Omega}^-$		
+2	$\bar{\Xi}^-$	Ξ^0	
+1	$K^+, \bar{\Sigma}^-$	$\bar{K}^0, \Lambda^0, \Sigma^0$	$\bar{\Sigma}^+$
0	π^+, p	$\pi^0, \eta^0, n, \bar{n}$	π^-, \bar{p}
-1	$\bar{\Sigma}^+$	$K^0, \bar{\Lambda}^0, \bar{\Sigma}^0$	K^-, Σ^-
-2		$\bar{\Xi}^0$	Ξ^-
-3			Ω^-

Tabela 5.2. nie zawiera wszystkich znanych hadronów. Ich lista stale się powiększa i wynosi obecnie ponad 80. Tabela tych cząstek wygląda zupełnie chaotycznie i niełatwo dostrzec w niej jakąkolwiek prawidłowość. Chaos ten można uporządkować przyjmując hipotezę o budowie kwarkowej hadronów. Wg tej hipotezy, podstawową cegiełką struktury hadronów są kwarki. Choć do tej pory nikomu nie udało się wybić kwarku ze struktury hadronu, to obecnie niewielu jest fizyków, którzy nie wierzyliby w kwarkową naturę silnych oddziaływań.

Wg hipotezy kwarkowej, bariony składają się z trzech kwarków, antybariony z trzech antykwarków, mezony – z dwóch; kwarku i antykwarku. Z uwagi na fakt, że bariony posiadają spin połówkowy, mezony – całkowity, wynika, że poznane kwarki posiadają spin połówkowy. Teoretycznego ograniczenia liczby kwarków nie znaleziono – odkrywamy obecnie hadrony o czterech i pięciu kwarkach.

5.9. Wzmianka o ogólnej teorii względności

Pełnego wyjaśnienia problemu grawitacji nie ma do dnia dzisiejszego. Zarówno przed Newtonem, jak i po Newtonie wysuwano liczne hipotezy dotyczące natury tego zjawiska. Wg jednego z modeli, przestrzeń wypełniona jest równomiernie cząsteczkami, poruszającymi się we wszystkich kierunkach i przekazującymi swój pęd każdemu ciału przy zderzeniu z nim. Pojedyncze ciało uzyskuje w ten sposób jednakowy pęd ze wszystkich kierunków i w rezultacie wypadowy pęd tego ciała jest równy zeru. W przypadku sąsiadujących ze sobą ciał, pędy, które uzyskują one z wewnętrznych (bliższych sobie) stron są mniejsze niż pędy z zewnętrznych stron, ze względu na wzajemne ekranowanie wewnętrznych stron od uderzeń cząstek z kierunku drugiego ciała. W ten sposób ciała te powinny doznawać działania siły przyciągającej. Przyjęcie tego modelu powodowałoby zmniejszenie prędkości ruchu orbitalnego planet co powinno dać efekt grawitacyjnego ekranowania. Efektu tego jednak nie obserwuje się. Teoretyczny efekt grawitacyjnego ekranowania, to jest przyciąganie dwóch ciał powinno maleć po umieszczeniu między nimi trzeciego ciała – ekranu, został doświadczalnie potwierdzony, jednakże w miarę wzrostu dokładności eksperymentowania – obalony.

Obecnie hipoteza o związku sił grawitacyjnych z istnieniem pewnego rodzaju cząsteczek nie została całkowicie obalona. Przyciąganie grawitacyjne dwóch ciał tłumaczy się wymianą cząstek, kwantów pola grawitacyjnego – grawitronów. Oddziaływania grawitronów spełniały podobną rolę jak wymiana mezonów w oddziaływaniach silnych lub wymiana fotonów w oddziaływaniach elektromagnetycznych.

Słuszność prawa powszechnego ciężenia Newtona było wielokrotnie weryfikowane. Wartość stałej grawitacji G sprawdzana metodą Cavendisha z użyciem najróżnorodniejszych mas próbnych jest wykazana z dokładnością do 0.3%. Zmiany tej stałej w czasie (o ile zachodzą) są niewielkie i wynoszą $\Delta G = 3 \cdot 10^{-11} G/\text{rok}$. Oznacza to, że w ciągu 10^{10} lat (wiek naszego Wszechświata) stała grawitacji nie zmieniła się więcej niż o 30% swej wartości.

Wprowadzenie do fizyki postulatów szczególnej teorii względności zakładającej, że prędkość rozchodzenia się dowolnego oddziaływania nie może przekroczyć prędkości światła w próżni, spowodowała, że zgodność teorii Newtona z obserwacjami w obrębie Układu słonecznego wynika z malej, w porównaniu z prędkością światła, prędkością planet i ciał na Ziemi. Teoria Newtona jest więc grawistatyką!

Uogólnienia teorii Newtona na pole ciężenia i poruszające się w tych polach z dowolną prędkością ciała dokonał A. Einstein w tzw. ogólnej teorii względności (OTW). Zmiany wprowadzone przez Einsteina okazały się istotne w obszarach silnych pól grawitacyjnych i przy dużych prędkościach.

Nowa teoria grawitacji Einsteina opiera się na następujących założeniach

- masa jest miarą bezwładności, ciężenia i energii ciał,
- oddziaływanie ciał rozchodzi się ze skończoną prędkością nie przekraczającą prędkości światła c .

Charakter związku masy z polem ciężenia jest w ogólnej teorii względności dość skomplikowany, jednakże Einsteinowi udało się sformułować równanie grawitacji w postaci uniwersalnej, to jest niezależnej od układu odniesienia, w którym znajduje się obserwator.

W obecności słabych pól grawitacyjnych, to jest gdy $\frac{\varphi}{c^2} \ll 1$, gdzie φ oznacza potencjał pola grawitacyjnego, otrzymujemy z równań Einsteina newtonowskie prawo grawitacji.

Przykładowo na powierzchni Słońca potencjał wytworzonego pola wynosi $\varphi = G \frac{M}{R}$, stąd

$\varphi \approx 10^{-6}$ co oznacza, że cały układ słoneczny znajduje się w obszarze słabego pola grawitacyjnego i teoria ciężenia Newtona powinna dawać tu zadawalające wyniki. Wynika stąd jednocześnie, że w obrębie układu słonecznego, wykazanie słuszności przewidywań ogólnej teorii względności, wymaga bardzo precyzyjnej techniki pomiarowej.

Do tej pory, omawiając różne zjawiska ze stanowiska układów inercjalnych, zakładaliśmy i w fizyce klasycznej i relatywistycznej, że przestrzeń jest jednorodna, izotropowa a czas jest jednorodny. Do opisu zjawisk zachodzących w tym świecie stosuje się geometrię Euklidesa. W układzie nieinercjalnym przestrzeń i czas przestają być jednorodne. Jeżeli przyjmiemy, a rezultaty obliczeń potwierdzają słuszność założeń i że w układach nieinercjalnych możemy stosować transformacje Lorentza, to

$$\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - \frac{2a}{c^2} x} \quad (91)$$

i

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{2a}{c^2} x}} \quad (92)$$

gdzie

$$v^2 = 2|a|x$$

wobec tego odstęp przestrzenny $\Delta x'$ dla obserwatora O' lub odstęp czasowy $\Delta t'$ zależy od tego w jakim miejscu przeprowadzamy pomiar oraz ile wynosi przyspieszenie O' .

Założenie, że masa jest miarą bezwładności i ciężenia nosi nazwę zasady równoważności. Głosi ona, że żadnym eksperymentem fizycznym nie możemy wykryć czy jesteśmy w układzie nieinercjalnym z przyspieszeniem \vec{a} , czy też w układzie inercjalnym z jednorodnym polem grawitacyjnym o natężeniu $|\vec{g}| = |\vec{a}|$. Pole grawitacyjne jest równoważne polu sił inercji, ale w małych obszarach czasoprzestrzeni.

Do chwili obecnej przeprowadzono pomyślnie wiele doświadczeń potwierdzających nowe efekty przewidziane przez ogólną teorię względności :

1⁰ zmienność orbit planet

2⁰ zmiana kierunku ruchu fotonów w ruchu grawitacyjnym

3⁰ zmiana częstotliwości światła w polu grawitacyjnym

Ad 1⁰ Orbity eliptyczne planet przechodzą w różnych odległościach od Słońca, a więc planety przebywają w obszarach różnych wartości potencjału grawitacyjnego. Po dłuższym okresie czasu powinniśmy zaobserwować efekt zmiany położenia punktu najbliższego Słońcu. Badania zmiany położenia perihelium Merkurego potwierdziły wniosek ogólnej teorii względności.

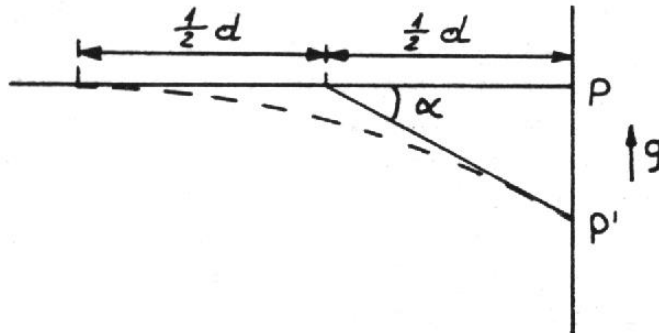
Ad 2⁰ Jeśli położymy we wzorze (91)

$$|\vec{a}| = |\vec{g}| = G \frac{M}{x^2} = G \frac{M}{x} \frac{1}{x} = \varphi \frac{1}{x}$$

to

$$\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}}$$

czyli rozmiary ciał w polu grawitacyjnym zależą od wartości potencjału tego pola. Konsekwencją tego faktu jest zmiana kierunku promienia świetlnego, przebiegający pomiędzy punktami o potencjałach φ_1 i φ_2 . Rozpatrzmy Rys. 43.



Rys. 43. Ugięcie promieni świetlnych w polu grawitacyjnym

Czas potrzebny na przebycie drogi d z prędkością c wynosi $t = \frac{d}{c}$. Przyspieszenie układu wynosi \vec{g} i jest skierowane prostopadle do góry. Promień świetlny odchyli się więc o odcinek

$$pp' = \frac{1}{2} g \left(\frac{d}{c} \right)^2$$

lub o kąt

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2} g \left(\frac{d}{c} \right)^2}{2\pi d}$$

Otrzymany z doświadczenia kąt ugięcia potwierdził obliczenia Einsteina.

Kładąc we wzorze (92) $a = \varphi \frac{1}{x}$, mamy

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{2a}{c^2} x}}$$

a więc zegar umieszczony nad dużą masą niżej, chodzi szybciej niż zegar umieszczony wyżej, ponieważ z warunku

$$\varphi_1 > \varphi_2 \text{ wynika } \Delta t_1 > \Delta t_2.$$

Niech w danym punkcie gdzie $\varphi_A = 0$ wysyłana jest fala elektromagnetyczna o częstości $\nu_0 = \frac{1}{T}$ gdzie T_0 jest okresem drgań w przestrzeni bez pola grawitacyjnego. W punkcie B, w którym $\varphi_B \neq 0$

$$v_0 > v_B$$

przy czym $v_B = \frac{1}{T_B}$, gdzie $T_B = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}}}$

oraz

$$\frac{v_B}{v_0} = \frac{T_0}{T_B} = \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}}$$

Względna zmiana częstości drgań pola wynosi

$$\frac{v_0 - v_B}{v_0} = \frac{\Delta v}{v_0} = 1 - \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}} = \frac{2\varphi}{c^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}} \right)}$$

Jeśli $\frac{2\varphi}{c^2} \ll 1$, to $\sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}} \approx 1$

stąd

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{\varphi}{c^2}$$

Otrzymany rezultat opisuje względną zmianę częstości drgań fali elektromagnetycznej pod wpływem potencjału grawitacyjnego. Zjawisko to nazywamy grawitacyjnym efektem Dopplera. Efekt ten w polu grawitacyjnym Ziemi jest bardzo mały i wynosi około

$$\frac{\Delta v}{v} \approx 10^{-16} h$$

Najbardziej intrygującym problemem jest wykrycie, przewidzianych teorią ciężenia Einsteina fal grawitacyjnych, Fale grawitacyjne to pole grawitacyjne istniejące w oderwaniu od źródeł i rozchodzące się w przestrzeni z prędkością światła.

Falę grawitacyjną można zdefiniować jako rozchodzące się z prędkością światła pole przyspieszeń, będące jednakowe dla wszystkich ciał, niezależnie od masy ciała – zasada równoważności. Ogólna teoria względności przepowiada emisję fal grawitacyjnych przez przyspieszone masy w przypadku rozmieszczenia tej masy w sposób asymetryczny. Im bardziej niesymetryczny jest rozkład masy poruszającego się ciała, tym więcej energii traci ono na promieniowanie grawitacyjne. Mechanicznym modelem wysyłającym fale grawitacyjne może być promieniowanie wirującego pręta. Znaleziona zależność na moc promieniowania grawitacyjnego

$$P = \frac{G}{c^5} m^2 d^4 \omega^6$$

dla niewielkich mas m i ich wzajemnej odległości d daje wielkość mocy promieniowania grawitacyjnego rzędu 10^{-30} erg/s. Znaczne powiększenie mocy można uzyskać albo kosztem powiększenia częstości drgań (wytrzymałość ciał na rozerwanie !) względnie źródłem silnych pól grawitacyjnych mogą być wielkie asymetryczne masy. Takie źródła w kosmosie istnieją –

są nimi gwiazdy podwójne. Odległość gwiazd podwójnych jest jednak tak olbrzymia, że emitowana moc rzędu 10^{30} erg/s jest w odległości Ziemi od tych obiektów tylko rzędu 10^{-9} erg/s. Tym należy tłumaczyć fakt, że zaobserwowanie fal grawitacyjnych przewidzianych teoretycznie przez Einsteina jest trudne, ale najnowsze obserwacje zderzeń gwiazd neutronowych zaobserwowanych w 2016 r. i zaobserwowane zakłócenia pola grawitacyjnego są obiecujące. Pierwszy detektor promieniowania grawitacyjnego skonstruowany przez fizyka amerykańskiego Webera od 1968r. odbiera sygnały. Realność sygnałów jest dublowana detektorami znajdującymi się w odległościach 1000 km. Rejestrowane impulsy odpowiadające mocy 10^7 erg/s na 1 cm^2 przekraczają możliwości emisji tych fal grawitacyjnych przez np. katastrofy kosmiczne. W naszej galaktyce zabrakłoby gwiazd do emisji fal grawitacyjnych. Tak więc sprawa interpretacji odbieranych impulsów przez Webera pozostaje sprawą otwartą.

5.10. Zadania do rozdziału 5

- 5.10.1. Ciało o masie m wyrzucone pod kątem α do poziomu spadło na Ziemię w odległości s od miejsca rzutu. Wiedząc, że maksymalna wysokość, jaką osiągnęło ciało, wynosi H , znaleźć pracę wykonaną przy rzucie. Opór powietrza zaniedbujemy.
- 5.10.2. Ciało o masie m rzucone z prędkością v pod kątem α do poziomu. Znaleźć jego energię potencjalną i kinetyczną po upływie czasu t .
- 5.10.3. Atom izotopu uranu U^{235} rozpada się wg schematu $U^{235} = Ba^{143} + Kr^{92}$. Przy czym energia kinetyczna obu fragmentów wynosi $4 \cdot 10^{-11}$ J. Znaleźć prędkość atomu Ba
 $1\text{ u} = 1.66 \cdot 10^{-27}$ kg.
- 5.10.4. Produkty spalania są wyrzucone z dyszy silnika rakiety porcjami po $m = 200$ g każda, z prędkością początkową $v = 1000$ m/s. Jaką prędkość osiągnęłaby rakietka po wyrzuceniu trzeciej porcji gazu, jeżeli w początkowym momencie masa jej była równa $M=300$ kg, a prędkość równałaby się zeru? Nie uwzględniać działania siły ciężkości.
- 5.10.5. Obliczyć wartość wektora indukcji magnetycznej B , powodującego odchylenie (określone promieniem $r = 30$ cm) biegnących prostopadle do kierunku B cząstek rozpędzone napięciem $U = 20$ kV.
- 5.10.6. Elektron relatywistyczny przechodzi przez komorę Wilsona, która znajduje się w polu magnetycznym o indukcji $B = 0.1$ Wb / m². Promień krzywizny toru $r = 20$ cm. Określić energię elektronu na początku toru.
- 5.10.7. Ile masy traci Słońca w przeciągu minuty, jeżeli 1 cm^2 powierzchni Ziemi otrzymuje od Słońca 2 cal energii promieniowania na minutę. Odległość Ziemi od Słońca przyjąć $150 \cdot 10^6$ km.
- 5.10.8. Jaką ilość ciepła uzyskalibyśmy zamieniając 1g masy na energię?
- 5.10.9. Wyznaczyć w dżulach i megaelektronowoltach energię odpowiadającą 1 u i masie 1 kg.
- 5.10.10. Wyrazić w kilogramach i u masy odpowiadające energiom 1J, 1 MeV i 1 eV.

- 5.10.11. Pociąg jadący z prędkością 72 km/h mija stojącą lokomotywę, wydającą gwizdkiem ton odpowiadający częstotliwości 600 Hz. Jakiej częstotliwości ton będzie słyszał podróżny jadący w pociągu przy zbliżaniu się i przy oddalaniu od gwizdzącej lokomotywy (prędkość dźwięku w powietrzu wynosi 340 m/s) ?
- 5.10.12. Przechodzień stojący na szosie słyszy dźwięk klaksonu zbliżającego się samochodu, odpowiadający częstotliwości 218 Hz. W rzeczywistości drganie wzbudzające dźwięk miało częstotliwość 200 Hz. Jaka była prędkość samochodu ? Prędkość dźwięku w powietrzu wynosi 340 m/s.
- 5.10.13. Drobiną gazu mającą prędkość 300 m/s zderza się elastycznie z drugą taką samą drobiną, która początkowo spoczywa. Po zderzeniu, pierwsza drobina porusza się pod kątem 30° od początkowego kierunku ruchu. Znaleźć prędkość każdej drobiny po zderzeniu i kąt, jaki tworzy odrzucona drobina z kierunkiem pierwotnym drobin padającej.
- 5.10.14. Kula o masie $m_1 = 3$ kg porusza się z prędkością $v_1 = 6$ m/s naprzeciw o masie $m_2 = 5$ kg, poruszającej się z prędkością $v_2 = 8$ m/s. Znaleźć i wyjaśnić zmiany całkowitej energii kinetycznej układu kul po niesprężystym, centralnym zderzeniu.
- 5.10.15. Kula o masie m_1 poruszająca się z prędkością v_1 dogania kulę o masie m_2 poruszającą się z prędkością v_2 . Znaleźć prędkość kul po sprężystym zderzeniu. Zderzenie jest centralne.
- 5.10.16. Znaleźć prędkość kuli karabinowej o masie 10 g, jeżeli trafiając w skrzynkę z piaskiem o masie 5 kg wiszącą na lince o długości 1 m i zatrzymując się w piasku, spowodowała wychylenie skrzynki od początkowego położenia o kąt 30°

6. UKŁADY BARDZO WIELU CZĄSTEK

6.1. Zarys kinetyczno – molekularnej teorii gazów

Dział fizyki zajmujący się zjawiskami fizycznymi oraz ich przebiegami, w których bardzo ważną rolę odgrywa pojęcie temperatury nazywamy termodynamiką.

Historycznie rozwój termodynamiki był ściśle związany z uogólnieniem zasady zachowania energii mechanicznej na procesy, w których ulega zmianie energia wewnętrzna ciał oraz z opracowaniem teorii silników cieplnych. Termodynamikę badającą związki między makroskopowymi wielkościami charakteryzującymi układ w całości (np. pomiar ciśnienia, objętości, temperatury) nazywamy termodynamiką fenomenologiczną.

Potwierdzona licznymi doświadczeniami korpuskularna budowa materii spowodowała przyjęcie w zagadnieniach termodynamicznych mikroskopowego punktu widzenia. Tutaj wielkościami charakteryzującymi układ jako całości są własności fizyczne atomów i cząsteczek tworzących ten układ. Interesującymi parametrami są prędkości cząsteczek, ich masy, energie, pędy. Stosując aparat mechaniki oraz rachunku prawdopodobieństwa uzyskujemy opis makroskopowy układu. Taka termodynamika ogólniejsza od termodynamiki fenomenologicznej nosi nazwę statystycznej.

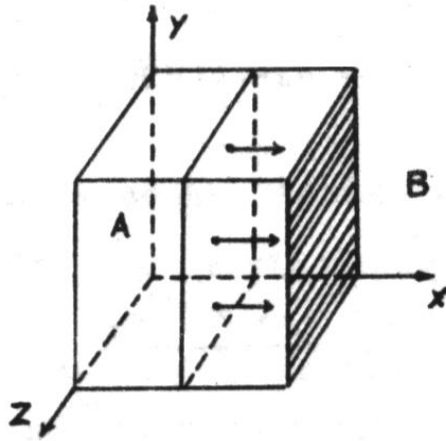
Wszelkie zasady termodynamiki fenomenologicznej oraz granice jej stosowalności można wyprowadzić na gruncie termodynamiki statystycznej. Przykładem może być kinetyczna teoria gazu doskonałego. Z mikroskopowego punktu widzenia model gazu doskonałego spełnia następujące warunki:

- równanie Clapeyrona,
- prawo Avogadro,
- stałość ciepła właściwego.

Zgodnie z teorią kinetyczno-molekularną, stworzoną przez Bernoulliego, Maxwella, Clausiusa, Boltzmana, gaz składa się z cząstek (molekuł), które poruszają się bezładnie z określonymi prędkościami. Cząstki te zderzają się między sobą, a efektem zderzeń ze ściankami naczynia, w których znajduje się gaz jest ciśnienie gazu wywierane na ścianki naczynia. Ciśnienie to możemy wyznaczyć przyjmując założenia kinetyczno-molekularnej teorii budowy gazów:

- cząsteczki gazu poruszają się bezustannie i bezładnie, a rozkład kierunków ruchu cząsteczek jest izotropowy. Cząsteczki podlegają newtonowskim zasadom ruchu,
- cząsteczki zderzają się ze sobą i ze ściankami naczynia sprężyste,
- średnice cząsteczek można pominąć w stosunku do średnich odcinków drogi między zderzeniami,
- siły międzycząsteczkowe (przyciąganie się cząsteczek) są pomijane. Zasięg sił międzycząsteczkowych jest nieporównywalnie mały z rozmiarami cząstek,
- czas trwania zderzenia jest pomijany w porównaniu z okresem czasu, który upływa między zderzeniami,
- pomiędzy zderzeniami cząsteczki poruszają się ze stałą prędkością po linii prostej,
- obowiązuje zasada ekwipartycji energii, to znaczy, że energia rozkłada się równomiernie na wszystkie możliwe ruchy cząsteczki (ruch postępowy, ruch obrotowy, ruch drgający).

6.2. Podstawowe równanie kinetycznej teorii gazów



Rys.44. Cząsteczki gazu doskonałego poruszają się w elastycznym zbiorniku w kierunku dodatniej osi x.

Wewnątrz elastycznego sześcianu o długości krawędzi L poruszają się cząsteczki. Niech rozpatrywana cząsteczka posiada masę m i prędkość v_1 . Cząsteczka poruszająca się w dowolnym kierunku osi L (to jest od ściany A do ściany B) posiada prędkość v_{1x} , zatem pęd jej przed zderzeniem ze ścianą B wynosi $p_p = mv_{1x}$. Po elastycznym zderzeniu ze ścianą B, jej pęd wynosi $p_k = mv_{1x}$. Zmiana pędu cząsteczki przy elastycznym zderzeniu ze ścianą B wynosi więc $p = p_k - p_p = -mv_{1x} - mv_{1x} = -2mv_{1x}$.

Niech rozpatrywana cząsteczka porusza się ruchem jednostajnym po linii prostej od ściany A do B i z powrotem do ściany A (bez zderzeń!). Czas potrzebny na przebycie tej drogi wynosi:

$$t = \frac{2L}{v_{1x}}$$

więc w jednostce czasu np. 1s, liczba zderzeń cząsteczki ze ścianą B wynosi:

$$\frac{v_{1x}}{2L}$$

zaś zmiana pędu jakiego doznaje cząsteczka w jednostce czasu wynosi:

$$-2mv_{1x} \cdot \frac{v_{1x}}{2L} = -\frac{mv_{1x}^2}{L}$$

Jeśli w sześcianie znajduje się N takich cząstek, to siła F (równa zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona zmianie pędu w czasie) wywierane na cząsteczki gazu jest równa:

$$F = \frac{m}{L} (v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + v_{3x}^2 + \dots + v_{Nx}^2)$$

natomiast ciśnienie p_x , jakie wywierają cząsteczki na ścianę B o powierzchni L^2 wynosi

$$p_x = \frac{F}{L^2} = \frac{mN\overline{v_x^2}}{L^3}, \text{ gdzie} \quad (93)$$

$$\overline{v_x^2} = \frac{v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + v_{3x}^2 + \dots + v_{Nx}^2}{N} \quad (94)$$

Wyrażenie (94) przedstawia średni kwadrat prędkości wszystkich cząstek poruszających się w kierunku osi x. Ciśnienie wywierane przez gaz na poszczególne ściany naczynia zgodnie z wyrażeniem (93) wynoszą odpowiednio:

$$P_x = \frac{mN \overline{v_x^2}}{L^3} = \frac{mN \overline{v_x^2}}{V}$$

$$P_y = \frac{mN \overline{v_y^2}}{V}$$

$$P_z = \frac{mN \overline{v_z^2}}{V}$$

Oczywiście zgodnie z prawem Pascala ciśnienie p jest równe we wszystkich kierunkach, czyli

$$p = p_x = p_y = p_z$$

i skoro założyliśmy izotropowość kierunków ruchu, czyli:

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \quad \text{i} \quad \overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$$

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

Tak więc ciśnienie p wynosi

$$p = \frac{mN \overline{v^2}}{3V} \quad (95)$$

Jest to równanie podstawowe kinetycznej teorii gazów.

Po przekształceniu otrzymamy:

$$pV = \frac{2N}{3} \cdot \frac{m \overline{v^2}}{2}$$

Wyrażenie $N \frac{m \overline{v^2}}{2} = \overline{E_k}$ oznacza średnią energię kinetyczną cząsteczek gazu, stąd

$$pV = \frac{2}{3} \overline{E_k} = \text{const} \quad (96)$$

Równanie (96) przedstawia prawo Boyle'a-Mariotte'a.

6.3. Równanie stanu gazu doskonałego. Gaz rzeczywisty

Oznaczmy objętość gazu w temperaturze 0°C przez V_0 , a ciśnienie p_0 . Jeśli ogrzejemy gaz do temperatury $t^{\circ}\text{C}$ przy stałym ciśnieniu p_0 , to przyjmie on objętość V_t . Następnie przeprowadźmy gaz przy stałej temperaturze do objętości V . Objętość V_t wyznaczmy z prawa Gay-Lussaca

$$V_t = V_0 (1 + \gamma t)$$

gdzie γ jest współczynnikiem objętościowej rozszerzalności gazów ($\gamma = \frac{1}{273} \cdot \frac{1}{K}$),

natomiast objętość V wyznaczmy z prawa Boyle'a–Mariotte'a

$$p \cdot V = p_0 \cdot V_t = \text{const},$$

gdzie p jest ciśnieniem gazu w tej przemianie.

Mamy więc

$$p \cdot V = p_0 \cdot V_0 (1 + \gamma t)$$

Jeśli temperaturę t wyrazimy w skali Kelvina, wówczas otrzymujemy

$$p \cdot V = p_0 \cdot V_0 \left[1 + \frac{1}{273} (T - 273) \right] = \text{const},$$

a po uproszczeniu

$$p \cdot V = p_0 \cdot V_0 \frac{T}{273} = \text{const}$$

lub

$$\frac{p \cdot V}{T} = \frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} = \text{const} \quad (97)$$

gdzie przez T_0 oznaczyliśmy temperaturę topniejącego lodu w skali Kelvina.

Powyższe stałe dla wybranych kilku gazów w odniesieniu do masy 1 kilograma wymienionych gazów wynoszą dla :

$$\text{wodoru} \quad \frac{pV}{T} = \text{const} = 4,125 \frac{J}{K},$$

$$\text{tlenu} \quad \frac{pV}{T} = \text{const} = 0,2597 \frac{J}{K},$$

$$\text{azotu} \quad \frac{pV}{T} = \text{const} = 0,2967 \frac{J}{K}.$$

Dla m kilogramów gazu powyższe rezultaty należy pomnożyć przez m ; dla 1 mola mamy więc dla:

$$\begin{array}{l} \text{wodoru} \quad \frac{pV}{T} = 4,125 \cdot 2,016 = 8,316 \frac{J}{\text{mol} \cdot K} \\ \text{tlenu} \quad \frac{pV}{T} = 0,2597 \cdot 32 = 8,312 \frac{J}{\text{mol} \cdot K} \\ \text{azotu} \quad \frac{pV}{T} = 0,2967 \cdot 28,02 = 8,314 \frac{J}{\text{mol} \cdot K} \end{array}$$

Wartość powyższej stałej dla gazów silnie rozrzedzonych wynosi:

$$R = 8,315 \frac{J}{\text{mol} \cdot K} \quad (98)$$

Równanie (97) nosi nazwę równania stanu gazu doskonałego.

Dla 1 mola dowolnego gazu równanie stanu gazu ma postać

$$pV = RT. \quad (99)$$

Ogólnie, dla m kilogramów gazu mamy:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad (100)$$

gdzie μ oznacza masę gazu przypadającą na 1 mol.

Przekształćmy równanie (99) wstawiając za ciśnienie p wyrażenie przedstawione zależnością (95). Mamy:

$$\frac{1}{3} m \overline{\frac{N}{V} v^2} V = RT \quad , \text{ i dalej} \quad (101)$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{m \overline{v^2}}{2} = \frac{R}{N} T \quad (102)$$

stąd

$$\frac{m \overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2} k \cdot T \quad (103)$$

Powyższy wzór pozwala interpretować temperaturę jako miarę średniej energii kinetycznej ruchu postępowego cząstek. Stała $\frac{R}{N} = k$ odnosząca się do jednej cząsteczki gazu nazywamy stałą Boltzmana. Wynosi ona :

$$k = \frac{R}{N} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}.$$

$$\text{Wyrażenie} \quad v = \sqrt{\overline{v^2}} \quad (104)$$

nazywamy średnią kwadratową prędkością. Znajdźmy obecnie tę wielkość korzystając z równania (11), oraz równania stanu gazu (9). Mamy :

$$\overline{v^2} = \frac{3 \cdot k \cdot T}{m} = 3 \frac{p}{\rho}, \quad (105)$$

gdzie: $\rho = N \frac{m}{V}$ jest gęstością gazu.

Równanie (101) po uwzględnieniu (99) przyjmuje postać

$$pV = \frac{1}{3} N \cdot m \cdot \overline{v^2}.$$

Jeśli w tym samym naczyniu o objętości V i pod takim samym ciśnieniem znajduje się N_1 cząstek o masach m_1 i średnim kwadracie prędkości $\overline{v_1^2}$, wówczas podobny rachunek prowadzi do

$$pV = \frac{1}{3} N_1 \cdot m_1 \cdot \overline{v_1^2}. \quad (106)$$

Jeśli temperatury obu gazów są identyczne, to zgodnie ze wzorem (103) będzie

$$m \overline{v^2} = m_1 \overline{v_1^2} = 2E_k$$

Równanie (101) oraz (106) wobec powyższej zależności dają

$$N = N_1 \quad (107)$$

Równanie (107) stanowi część prawa Avogadro; w równych objętościach przy równych temperaturach i pod jednakowymi ciśnieniami znajdują się równe liczby cząsteczek. Liczba cząstek lub atomów tworzących 1 mol (1 kmol) zwana stałą Avogadro wynosi:

$$6,023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$$

Załóżmy obecnie, że w sześcianie o krawędzi L zamknięto w pewnej temperaturze dwa rodzaje cząsteczek: N_1 cząsteczek o masach m_1 jednego gazu i N_2 cząsteczek o masach m_2 , drugiego gazu. Średni nacisk cząsteczek na ściany jest sumą średnich nacisków poszczególnych składników:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

wobec tego ciśnienie

$$p = p_1 + p_2 \quad (108)$$

Gdzie zgodnie ze wzorem (95)

$$p_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{m_1 N_1}{V} \overline{v_1^2}$$

oraz

$$p_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{m_2 N_2}{V} \overline{v_2^2}$$

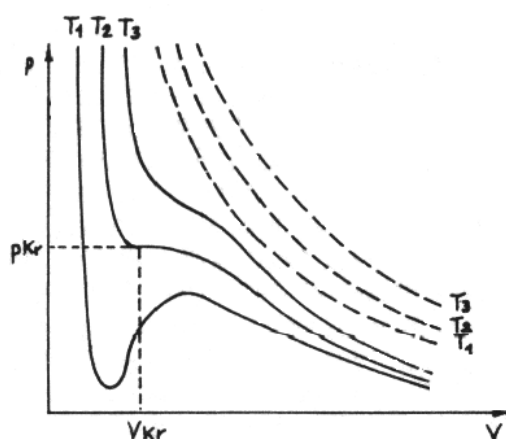
i są to ciśnienia, jakie wywierałyby poszczególne gazy wypełniające z osobna naczynie.

Wzór (106) uzyskany przy założeniach kinetyczno-molekularnej teorii gazów pozwolił uzasadnić empiryczne prawo Daltona głoszące, że ciśnienia mieszaniny gazów równają się sumie ciśnień, jakie wywierałyby w tej samej objętości i temperaturze poszczególne składniki.

Gazy rzeczywiste stosują się do wyprowadzonych równań tylko w przybliżeniu. Uwzględniając fakt, że olbrzymia ilość cząstek zajmuje skończoną objętość, wielkość, o którą zmniejsza się objętość naczynia, w którym się znajdują (czynnik b we wzorze (109)) oraz to, że cząstki (szczególnie w zakresie małych ciśnień) oddziałują na siebie na siebie siłami międzycząsteczkowymi (czynnik a), dla gazów rzeczywistych stosujemy równanie van der Waalsa:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad (109)$$

Na rys.45. przedstawiono izotermy gazu van der Waalsa i izotermy gazu doskonałego dla różnych temperatur. Punkt przegięcia dla temperatury T_2 (linia ciągła) wyznacza ciśnienie i objętość krytyczną. Dla powietrza temperatura krytyczna wynosi około -140°C a ciśnienie w punkcie krytycznym wynosi około 37 atm.



Rys.45. Izotermy gazu van der Waalsa (krzywe ciągłe) i gazu doskonałego (krzywe przerywane).

Jednostką ciśnienia w układzie SI jest pascal (Pa) :

$$1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Używanymi powszechnie jednostkami ciśnienia są obecnie :

$$1 \text{ atmosfera techniczna} - 1 \text{ at} = \frac{\text{KG}}{\text{cm}^2},$$

$$1 \text{ atmosfera fizyczna} - 1 \text{ atm} = 1.033$$

$$\text{at} = 1013 \text{ hPa} = 760 \text{ mmHg}$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ tor} = 1 \text{ Tr} = 1 \text{ mmHg.}$$

Stałe a i b w równaniu van der Waalsa wyznacza się doświadczalnie. Czynnik $\frac{a}{V^2}$ nosi nazwę ciśnienia wewnętrznego. Dla powietrza o temperaturze 0°C i przy ciśnieniu

zewnątrznym 1 atm, czynnik $\frac{a}{V^2} = 0.0028 \text{ atm}$, ale już przy ciśnieniu zewnętrznym $p = 100 \text{ atm}$ i $t = 0^\circ\text{C}$, $\frac{a}{V^2} = 26 \text{ atm}$. W temperaturach -75°C odpowiednie wartości ciśnienia wewnętrznego wynoszą 0.0056 atm i 84.5 atm.

Wzór Van der Waals posiada oczywiście pewien ograniczony zakres stosowalności. Oznacza to, że powyższy model gazu jest zbyt uproszczony.

6.4. Praca i ciepło

Każde ciało w przyrodzie składa się z cząsteczek (atomów), które z kolei mają określoną energię. Dla każdej cząstki obowiązuje oczywiście prawo zachowania energii, stąd z makroskopowego punktu widzenia każde ciało posiada pewną energię. Tę energię, będącą sumą energii kinetycznej chaotycznego ruchu wszystkich cząsteczek ciała oraz energii potencjalnych ich wzajemnego oddziaływania nazywamy energią wewnętrzną.

Jeżeli układ jest izolowany cieplnie, to jego energia wewnętrzna jest stała ($u = \text{const}$).

Jeżeli na układ działają siły zewnętrzne, to jego energia ulega zmianie i zmiana energii mechanicznej układu jest równa pracy W wykonanej przez siły zewnętrzne. Zmiana energii wewnętrznej izolowanego cieplnie układu wynosi:

$$\Delta U = \Delta W$$

gdzie ΔW oznacza pracę wykonaną nad układem. Gdy $\Delta W > 0$, to siły zewnętrzne wykonują pracę nad układem zwiększając jego energię wewnętrzną ($\Delta U > 0$), gdy $\Delta W < 0$, to układ wykonuje pracę zewnętrzną kosztem swej energii wewnętrznej.

Praca jest makroskopowo uporządkowanym sposobem zmiany energii wewnętrznej np. uporządkowanym ruchem cząstek tłoka przesuwanego przy sprężaniu gazu (Rys.3), uporządkowanym ruchem ładunków elektrycznych przy przepływie prądu elektrycznego itp. Praca prądu elektrycznego, praca mechaniczna, praca pola magnetycznego są wzajemnie równoważne. Dlatego też można ograniczyć się tylko do pracy mechanicznej.

W przemianach termodynamicznych możliwa jest zmiana energii wewnętrznej układu nawet wówczas, gdy nie działają na ten układ siły zewnętrzne. Energię, która może być przekazywana układowi w inny niż mechaniczny sposób, nazywamy ciepłem (Q). Jeżeli energia wewnętrzna układu, na który nie działają siły zewnętrzne wzrosła ($\Delta U > 0$), to mówimy, że układ pobiera ciepło ($\Delta Q > 0$), jeżeli energia wewnętrzna układu zmalała ($\Delta U < 0$), to układ oddał otoczeniu ciepło ($\Delta Q < 0$).

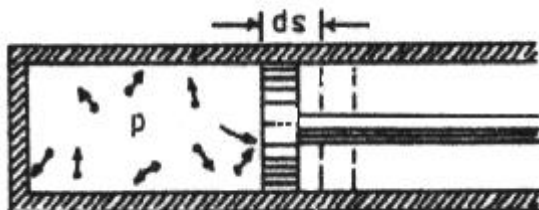
Jeżeli pomiędzy dwoma ciałami następuje wymiana energii przez przepływ ciepła, a nie jest przez te ciała wykonywana żadna praca ($\Delta W = 0$), wówczas zmniejszenie energii wewnętrznej jednego ciała jest równe przyrostowi energii wewnętrznej drugiego ciała. W tym wypadku można przeprowadzić bilans cieplny. Zagadnieniami tymi zajmuje się kalorymetria.

W ogólnym przypadku układ termodynamiczny może oddziaływać z otoczeniem zarówno mechanicznie (lub np. elektrycznie, magnetycznie) pobierając lub wykonując pracę lub oddziaływać termicznie (pobierając lub oddając ciepło). Zmiana energii wewnętrznej ΔU jest wówczas równa sumie ciepła dostarczonego układowi ΔQ oraz pracy ΔW wykonanej nad układem przez siły zewnętrzne:

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W \quad (110)$$

Zależność ta nosi nazwę pierwszej termodynamiki.

Na Rys.46 przedstawiono rozprężający się gaz przesuujący tłok o nieskończenie małą odległość ds .



Rys.46. Gaz pod ciśnieniem p wykonuje pracę dW .

Praca sił ciśnienia wykonana przez gaz wynosi:

$$dW = -F \cdot ds = -\frac{F}{S} S \cdot ds = -pdV, \quad (111)$$

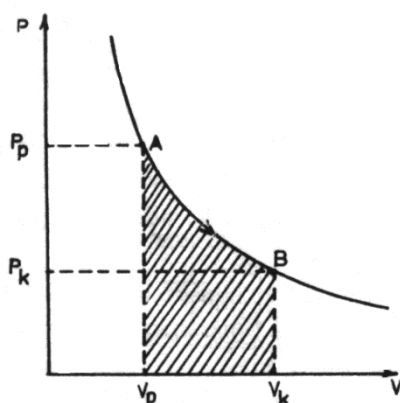
gdzie $dV=S \cdot ds$ jest różniczkowym przyrostem objętości gazu, S oznacza powierzchnię tłoka.

Wzór ten można stosować tylko przy małej zmianie objętości ciała, aby podczas tej zmiany ciśnienie można było uważać w przybliżeniu za stałe. Znak minus w powyższym wzorze pochodzi stąd, że zmniejszeniu objętości ($\Delta V < 0$) towarzyszy dodatnia praca siły zewnętrznej, a zwiększeniu objętości ($\Delta V > 0$) – praca ujemna.

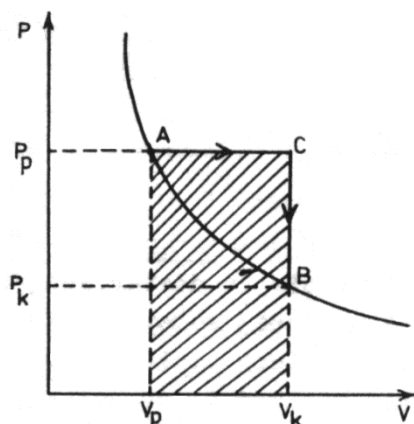
Ogólnie wraz z przesunięciem tłoka, zmienia się ciśnienie tłoka p , aby więc obliczyć całkowitą pracę wykonaną przez gaz na przesunięciu tłoka o skończoną odległość, należy obliczyć całkę

$$W = - \int_{V_p}^{V_k} p dV \quad (112)$$

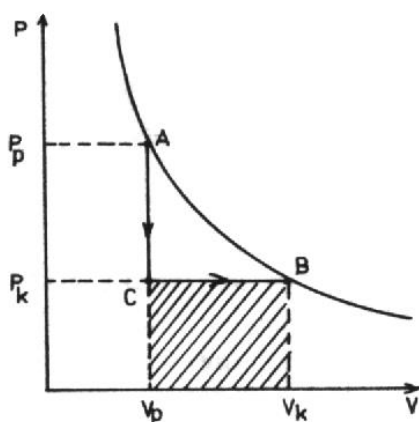
Na Rys.47. Rys.48. Rys.49. przedstawiono szczególne przypadki ilustrujące sposób obliczania tej całki w zależności od drogi przejścia od stanu A do stanu B.



Rys.47. Praca W wykonana przez gaz jest równa zakreskowanej powierzchni. Strzałka wskazuje drogę przejścia od stanu A do stanu B.



Rys.48. Praca W wykonana przez gaz jest równa zakreskowanej powierzchni. Strzałka wskazuje drogę przejścia od stanu A do stanu B.



Rys.49. Praca W wykonana przez gaz jest równa zakreskowanej powierzchni. Strzałka wskazuje drogę przejścia od stanu A do stanu B.

Widzimy więc, że praca wykonana przez układ zależy nie tylko od stanu początkowego i końcowego, ale również od stanów pośrednich. Zależy więc od drogi przejścia.

Oznacza to, że praca nie jest parametrem stanu. Matematycznie oznacza to, że wyrażenie dW (podkreślona litera d we wzorze (111)) nie jest różniczką zupełną funkcji W , stanowi jedynie bardzo małą elementarną pracę przy bardzo małej zmianie objętości układu.

Wielkość scharakteryzowaną zależnością

$$c = \frac{dq}{dt} \quad (113)$$

nazywamy ciepłem właściwym.

Wielkość dq oznacza ilość ciepła dostarczaną do jednostki ilości substancji, czyli do 1 kg danej substancji w jakiejś przemianie, dt oznacza przyrost temperatury ciała odpowiadający tej ilości ciepła. Jeżeli powyższe wielkości odnoszą się do ilości 1 mola (kilomola) gazu, to te wielkości oznaczane są w literaturze wielkimi literami.

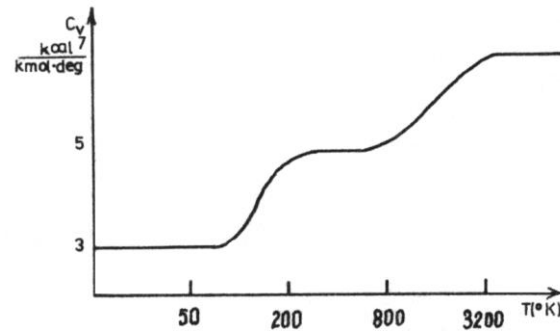
Ciepło właściwe zależy od rodzaju przemiany, ale dla gazów najbardziej istotne jest ciepło właściwe przy stałej objętości c_v oraz ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu c_p .

Wielkość

$$x = \frac{C_p}{C_v} \quad (114)$$

jest bardzo ważną wielkością w termodynamice i jest związane z liczbą atomów w cząsteczce.

Ciepło właściwe c_p i c_v są dla gazu doskonałego wielkością stałą, natomiast dla gazów rzeczywistych ciepło właściwe zależy od temperatury – Rys.50.



Rys.50. Zmiana ciepła molowego C_v wodoru wraz z temperaturą.

Często zamiast ciepła właściwego używamy ciepła molowego, to jest takiej ilości energii, która jest potrzebna do podniesienia temperatury 1 mola danej substancji o jeden stopień Kelvina. Przykładowo, dla jednoatomowego gazu doskonałego, ciepło molowe w stałej objętości

$$C_v = \frac{3}{2} R \approx 12,5 \frac{J}{mol \cdot K}$$

Ciepło molowe pod stałym ciśnieniem $C_p = \frac{5}{2} R \approx 20,8 \frac{J}{mol \cdot K}$.

Dla cieczy i ciał stałych C_v i C_p różnią się bardzo nieznacznie i wynoszą $C_v \approx C_p \approx 3R \approx 25 \frac{J}{mol \cdot K}$, a tę zależność nazywamy regułą Dulonga – Petita.

6.5. Zasada ekwipartycji energii

W mechanice statystycznej dowodzi się, że jeżeli liczba cząstek (gazu) jest duża i jeżeli obowiązuje w ich ruch mechanika Newtona, to wyrażenie na energię całkowitą zawierać będzie energię kinetyczną ruchu postępowego cząstek w postaci wzoru typu $\frac{1}{2}mv_x^2$, energię

kinetyczną ruchu obrotowego $-\frac{1}{2}I\omega_x^2$ (I – moment bezwładności, ω – prędkość kątowna),

energję kinetyczną ruchu drgającego $-\frac{1}{2}kx^2$ (k – stała, x – wychylenie) i wszystkie te

człony mają tę samą średnią wartość zależną jedynie od temperatury. Powyższe stwierdzenie nosi nazwę zasady ekwipartycji energii, a każdy z niezależnych sposobów absorpcji energii nazywamy stopniem swobody. Liczba stopni swobody jest więc liczbą niezależnych współrzędnych, koniecznych od określenia położenia cząsteczki, co równocześnie określa

liczbę rodzajów ruchów związanych z cząsteczką. Zasada ekwipartycji energii głosi, że na każdy stopień swobody przypada taka sama średnia energii o wartości $\frac{1}{2}kT$.

Ze wzoru (103) wynika, że średnia energia kinetyczna ruchu postępowego przypadająca na 1 cząsteczkę gazu wynosi

$$\overline{E_k} = \frac{3}{2}kT$$

i składa się zgodnie z zasadą ekwipartycji energii z trzech członów o wartości $\frac{1}{2}kT$ na każdy stopień swobody typu

$$\frac{1}{2}mv_x^2, \frac{1}{2}mv_y^2, \frac{1}{2}mv_z^2$$

Cząsteczki jednoatomowe mają więc $f = 3$ stopnie swobody.

Cząsteczki dwuatomowe mają 5 stopni swobody ; 3 stopnie swobody ruchu postępowego oraz 2 stopnie związane z obrotem cząsteczki jako bryły sztywnej wokół prostopadłych względem siebie osi. Cząsteczki trójatomowe i cząsteczki o większej liczbie atomów mają na ogół 6 stopni swobody, ponieważ dla takich cząsteczek są możliwe trzy osie obrotu. Jeżeli atomy w cząsteczkach mogą wykonać drgania, to liczba stopni swobody powiększa się ponieważ każde drganie dostarcza dwóch stopni swobody.

Energia wewnętrzna gazu doskonałego U jest sumą energii kinetycznej ruchu cieplnego wszystkich cząsteczek gazu w danej objętości. Dla 1 kilomola cząsteczek gazu doskonałego (gaz jednostkowy : $f = 3$)

$$U = N\overline{E_k} = \frac{3}{2}NkT = \frac{f}{2}RT \quad (115)$$

gdzie N jest liczbą Avogadro.

Weźmy jeden kilomol gazu i ogrzejmy go w warunkach stałej objętości o dT . Dostarczone ciepło wyniesie

$$dQ = C_v dT \quad (116)$$

Korzystając z I zasady termodynamiki i przy warunkach $dW=0$ (gaz nie zmienia swojej objętości, czyli nie wykonuje ani nie pobiera żadnej pracy) mamy

$$dU = dQ + dW \quad (117)$$

(I zasada termodynamiki)

stąd:

$$dU = C_v dT \quad (118)$$

więc:

$$U = \frac{f}{2}RT = C_v T$$

i

$$C_v = \frac{f}{2}R \quad (119)$$

Ogrzejmy teraz 1 kilomol gazu przy stałym ciśnieniu o dT , wówczas

$$\underline{dQ} = C_p dT \quad (120)$$

Z I zasady termodynamiki i podstawie zależności (111)

($\underline{dW} = -pdV$) oraz (116) mamy

$$\begin{aligned} dU &= \underline{dQ} + \underline{dW}, \\ dU &= C_p dT - pdV = C_v dT \end{aligned} \quad (121)$$

Gaz w tej przemianie jest pod stałym ciśnieniem, podlega więc przemianie izobarycznej ($p = \text{const}$). Różniczkując równanie stanu gazu przy warunku $p = \text{const}$

$$pV = RT$$

mamy

$$pdV = RdT$$

i związek (121) możemy zapisać

$$C_p dT - RdT = C_v dT$$

Po uproszczeniu przez dT otrzymujemy bardzo ważny związek – równanie Mayera

$$C_p - C_v = R. \quad (122)$$

Ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu C_p wiąże się z liczbą stopni swobody następująco:

$$C_p = C_v + R = \frac{f}{2} R + R = \frac{f+2}{2} R$$

i

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v} = \frac{f+2}{2} \quad (123)$$

Dla gazów jednoatomowych mieliśmy $f = 3$, $\kappa = \frac{5}{3} = 1,67$, dla gazów dwuatomowych $f = 5$,

więc $\kappa = \frac{7}{5} = 1,4$, dla gazów trójatomowych i gazów o większej liczbie atomów w cząsteczce

$f = 6$, stąd $\kappa = \frac{8}{6} = 1,33$.

Powyższe teoretyczne wartości dość dobrze zgadzają się z wartościami wyznaczonymi doświadczalnie, a odstępstwa sugerują, że model gazu nie odpowiada rzeczywistej strukturze cząstek gazu.

6.6. Zasady termodynamiki

Termodynamika fenomenologiczna, klasyczna, rozpatruje stany równowagi termodynamicznej. Przez pojęcie „stan” będziemy właśnie rozumieć stan równowagi. Doświadczenie i obserwacje wskazują, że każdy stan równowagi ciała prostego może być opisany w sposób wystarczający i jednoznaczny przez podanie jego objętości, energii oraz mas odpowiednich składników. Obserwacje wskazują także, że w danych określonych warunkach otoczenia, stan równowagi trwałej, ustalający się danym układzie jest zawsze taki sam jednoznacznie określony przez stan otoczenia (pewnik równowagi). Powyższe stwierdzenia postulują istnienie stanów równowagi. Jeżeli ograniczenia nałożone na układ albo stan otoczenia ulegną zmianie, to układ będzie dążył do nowego, także jednoznacznie określonego stanu równowagi trwałej.

Z pewnika równowagi wynika, że jeżeli układ A znajduje się w równowadze termicznej z układami B i C układy te nie kontaktują ze sobą, to układy B i C znajdują się w stanie równowagi termicznej względem siebie. Oznacza to, między układami A i B oraz A i C nie zachodzi wymiana energii. Fakt ten wykorzystywany jest w procesie pomiaru temperatury, a powyższe stwierdzenie nosi nazwę zerowej zasady termodynamiki.

Zasadę tę można wypowiedzieć następująco: jeśli temperatura dwóch układów jest taka sama jak trzeciego, to oba układy A i B mają jednakową temperaturę. Na tej podstawie można więc wybrać jakiś wzorcowy układ i przez porównanie stanu różnych układów z jego stanem można mierzyć temperaturę. Dodatkowo należy wprowadzić skalę temperatury przyjmując dla danej skali pewne punkty stałe. Od 1954r. za taki standardowy punkt stały przyjmuje się punkt potrójny wody. Punktowi temu przypisujemy umownie temperaturę $T_0=273,16$ K (ciśnienie punktu potrójnego wody wynosi 610,5 Pa). Doświadczalnie ustalono ciała termometryczne (są to gazy utrzymywane w stałej objętości), dla których zależność między ciśnieniem p a temperaturą T jest liniowa:

$$T = 273,16 \lim_{p_0 \rightarrow 0} \frac{p}{p_0},$$

gdzie p_0 oznacza ciśnienie gazu w punkcie potrójnym wody.

Powyższy wzór definiuje tzw. skalę gazową (skalę Kelvina) i w zakresie stosowalności tej definicji (to jest z wyjątkiem niskich i wysokich temperatur) powyższa zależność jest równoważna termodynamicznej skali temperatury Kelvina. Poza skalą Kelvina, stosowaną głównie w fizyce, w powszechnym użyciu jest stustopniowa skala Celsjusza, której standardowymi punktami są: punkt wrzenia wody (100°C) oraz punkt topnienia lodu wodnego (0°C). Między skalą termometryczną Celsjusza i Kelvina istnieje zależność

$$T = t + 273,15$$

przy czym różnice temperatur wynosząca 1°C równa się 1 K.

W krajach anglosaskich używana jest skala Fahrenheita, której jednostka oznaczana jest 1°F . Temperaturę wyrażoną w skali Fahrenheita można przeliczyć na skalę Celsjusza następującą zależnością

$$t_F = \frac{9}{5}t_0 + 32$$

Oprócz powyższych skali termometrycznych w użyciu są: skala Rankina (zmodyfikowana skala Fahrenheita), dla której:

$$1^{\circ}\text{Rank} = 1^{\circ}\text{F}$$

$$t^{\circ}\text{Rank} = t^{\circ}\text{F} + 459,67$$

oraz skala Reamira, którą określają dwa punkty stałe :

- i
- | | |
|----------------------------|---------------------------------|
| $t_0 = 0^{\circ}\text{R}$ | – temperatura topniejącego lodu |
| $t_k = 80^{\circ}\text{R}$ | – temperatura wrzenia wody. |

W termodynamice bardzo ważną rolę spełniają procesy odwracalne oraz nieodwracalne. Dany proces nazywamy odwracalnym, gdy można go przeprowadzić w kierunku odwrotnym do stanu końcowego przez ten sam ciąg stanów pośrednich i przywrócić układ do stanu początkowego nie wywołując żadnych zmian w otoczeniu. Przykładem procesu odwracalnego jest adiabatyczny proces sprężenia gazu doskonałego. Przemiana nie spełniająca powyższych warunków nazywa się nieodwracalną. Przykładem procesu nieodwracalnego jest np. proces dyfuzji, proces wyrównywania się temperatur. Większość procesów rzeczywistych to procesy nieodwracalne.

Jeśli przebieg procesu jest nieskończenie powolny, tak że w dowolnej chwili układ możemy traktować jako znajdujący się w równowadze to taki proces nazywamy quasistatycznym.

Pierwszą zasadę termodynamiki w postaci różniczkowej definiujemy następująco:

$$dU = dQ + dW \quad (124)$$

Symbol „ dU ” oznacza, że energia wewnętrzna jest różniczką zupełną, jej wartość zależy od stanu początkowego i końcowego, a nie zależy od stanów pośrednich.

Wynika stąd, że w procesie kołowym, w którym układ wraca do stanu początkowego

$$\oint dU = 0.$$

Równanie (124) czytamy: zmiana energii wewnętrznej przy przejściu z jednego stanu do drugiego jest równa sumie prac sił zewnętrznych i ilości przekazanego ciepła.

Pierwsza zasada termodynamiki wyklucza zbudowanie takiego silnika, który mógłby wytwarzać pracę nie pobierając przy tym żadnej energii z zewnątrz perpetuum mobile I rodzaju.

Zależność (124) jest słuszna dla dowolnych procesów termodynamicznych w układach zamkniętych, w których ilość substancji nie ulega zmianie. W układach otwartych, w których ilość substancji zmienia się o ΔM , I zasada termodynamiki przyjmuje postać

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W + \mu \Delta M$$

gdzie μ oznacza energię jednostki masy.

Pierwsza zasada termodynamiki jest bardzo ogólną zasadą, można ją stosować do każdego procesu, jednakże z niej nie wynika odpowiedź czy dany proces może zajść i w jakim kierunku może zajść. Na te pytania odpowiada druga zasada termodynamiki.

Druga zasada termodynamiki jest zasadą wynikającą z danych doświadczalnych wielu dziedzin nauki i sprowadza zagadnienie przenoszenia ciepła za pomocą maszyny cieplnej.

Najstarsze sformułowanie drugiej zasady termodynamiki pochodzi od Kelvina i brzmi następująco: Niemożliwa jest realizacja procesu termodynamicznego, którego jedynym

rezultatem byłoby przekształcenie w pracę ciepła pobranego z jednego zbiornika energii wewnętrznej o wszędzie jednakowej temperaturze „T”.

Z drugiej zasady termodynamiki wynika, że o ile energię mechaniczną można zamienić na energię cieplną bezpośrednio i całkowicie, to odwrotna zmiana energii cieplnej na energię mechaniczną jest ograniczona dodatkowymi warunkami. Drugą zasadą termodynamiki wyraża więc niemożliwość zbudowania perpetuum mobile drugiego rodzaju, to jest takiego silnika, który pracowałby bez spadku temperatury w całości zmieniając ciepło na pracę. Druga zasada termodynamiki wskazuje na istotną różnicę między formami przekazywania energii – za pomocą pracy mechanicznej. Praca mechaniczna wiąże się z uporządkowanym ruchem cząsteczek ciała, natomiast ciepło z ich ruchem chaotycznym. Przemiana ruchu uporządkowanego w ruch chaotyczny może odbywać się samorzutnie i bez ograniczeń (zamiana pracy na ciepło), natomiast samorzutna przemiana ruchu chaotycznego w uporządkowany (zamiana ciepła na pracę) bez ingerencji z zewnątrz, jest w przyrodzie niemożliwa.

Równoważne sformułowania II zasady termodynamiki są następujące:

- według Clausiusa, żadna pracująca cyklicznie maszyna nie może bez zmian w otoczeniu przenosić w sposób ciągły ciepła ze zbiornika o temperaturze niższej do zbiornika o temperaturze wyższej,
- według Plancka, niemożliwe jest zbudowanie maszyny cieplnej działającej cyklicznie, która oziębiałaby zbiornik ciepła i wykonywała pracę nie powodując żadnych zmian w przyrodzie,
- według Carnota, silnik cieplny nie może pracować nie pobierając ciepła ze „źródła ciepła” i nie oddając go do chłodnicy.

Zdefiniujmy bardzo ważną wielkość termodynamiczną zwaną entropią, która umożliwia ilościowe sformułowanie drugiej zasady termodynamiki.

Dla dowolnego silnika cieplnego zachodzi:

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (125)$$

przy czym równość zachodzi tylko dla silników odwracalnych.

Związek (125) otrzymany dla cyklu Carnota przekształćmy następująco

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \quad (126)$$

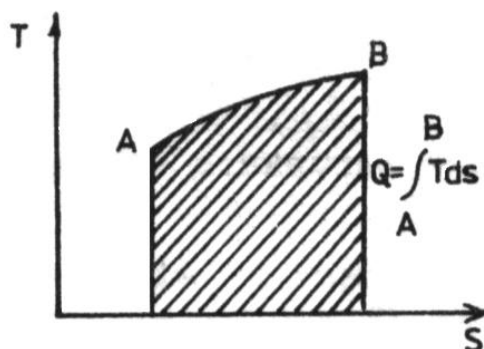
gdzie oznaczyliśmy ciepło pobrane Q_1 za dodatnie, a ciepło oddane chłodnicy Q_2 za ujemne.

Wyrażenie $\frac{Q}{T}$ nazywamy ciepłem zredukowanym.

Jeżeli weźmiemy infinitezymalną zmianę Q , czyli $\frac{dQ}{T}$, to takie wyrażenie jest różniczką zupełną i nazywamy je entropią.

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (127)$$

Równanie (127) umożliwia geometryczne zinterpretowanie ciepła na wykresie T – S.



Rys.51. Zakreskowane pole przedstawia ciepło w układzie T – S.

Dla procesów odwracalnych zmianę entropii obliczamy zależnością :

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} \quad (128)$$

i dla dowolnych cykli odwracalnych, kołowych

$$\Delta S = \oint \frac{dQ}{T} = 0 \quad (129)$$

Dla procesów nieodwracalnych, kołowych

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0 \quad (130)$$

entropia nie ma określonego znaczenia. Istnieje jednak możliwość zastosowania entropii również do procesów nieodwracalnych. Jeżeli w wyniku pewnego procesu nieodwracalnego układ przeszedł od stanu 1 do stanu 2, to można te stany połączyć dodatkowo pewnym pomocniczym procesem odwracalnym, od stanu 2 do stanu 1, tworząc w ten sposób cykl (oczywiście będzie to cykl nieodwracalny, gdyż jedna z jego części jest nieodwracalną). Mamy wówczas zgodnie z (129):

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dQ}{T} + \int_2^1 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dQ}{T} + S_1 - S_2 < 0,$$

Stąd dla procesu nieodwracalnego

$$\Delta S = S_2 - S_1 > \int_1^2 \frac{dQ}{T}$$

Dla dowolnego procesu termodynamicznego możemy więc napisać

$$\Delta S = S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \frac{dQ}{T} \quad (131)$$

Jeżeli proces przebiega w warunkach izolacji cieplnej układu wówczas ,

$$dQ = 0$$

i

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} = 0$$

czyli

$$\Delta S = S_2 - S_1 \geq 0 \quad (132)$$

Równanie (132) wyraża zasadę wzrostu entropii: entropia układu izolowanego nie może się zmniejszyć w wyniku dowolnych procesów zachodzących w tym układzie. Powyższe stwierdzenie stanowi jeszcze jedno sformułowanie drugiej zasady termodynamiki, a wzór (132) jest jej wyrazem ilościowym

W związku z tym, że rzeczywiste procesy zachodzą w kierunku stanów o wyższym prawdopodobieństwie (w kierunku wyższej entropii), to naruszenie drugiej zasady termodynamiki oznacza zajście procesu o bardzo małym prawdopodobieństwie (ale jednak możliwym). II zasada termodynamiki określa więc najprawdopodobniejszy przebieg zdarzeń.

Entropia jest proporcjonalna do liczby cząstek w układzie. Dzięki temu w układach o bardzo dużej liczbie cząstek nie ujawnia się probabilistyczny charakter II zasady termodynamiki. Wynika to stąd, że realizacja bardzo mało prawdopodobnego zdarzenia może nastąpić po upływie bardzo długiego czasu.

Wzór (128) umożliwia wyznaczenie tylko przyrostu entropii, nie pozwala natomiast na znalezienie jej wartości bezwzględnej. Definicja ta jest więc niekompletna i wymaga uzupełnienia. Takim uzupełnieniem jest III zasada termodynamiki sformułowana przez Nernsta i Plancka:

$$\lim_{T \rightarrow 0} (S_2 - S_1) = 0, \quad (133)$$

entropia każdego układu termodynamicznego dąży do zera.

Z punktu widzenia termodynamiki fenomenologicznej istotną treść trzeciej zasady termodynamiki stanowi fakt : $\Delta S \rightarrow 0$, przy $T \rightarrow 0$, natomiast warunek $S \rightarrow 0$, przy $T \rightarrow 0$, ma charakter postulatywny i nakładany jest ze względu na wygodę. Dopiero na gruncie fizyki statystycznej ten warunek nabiera głębokiego sensu fizycznego. W fizyce statystycznej entropię interpretuje się jako miarę stopnia uporządkowania układu mikroskopowego. Duża entropia – stopień uporządkowania układu jest mały. Układ makroskopowy o maksymalnym uporządkowaniu, którego stan można zrealizować tylko przez jedną określoną konfigurację mikroskopową ma entropię równą zero.

Tak więc z punktu widzenia termodynamiki statystycznej trzecia zasada termodynamiki oznacza, że przy $T \rightarrow 0$ wszystkie układy przechodzą w stan maksymalnego uporządkowania. Konsekwencją trzeciej zasady termodynamiki jest niemożliwość osiągnięcia temperatury zera bezwzględnego (a więc i osiągnięcia sprawności silnika Carnota równą 1) za pomocą skończonej liczby procesów termodynamicznych. W temperaturze zera bezwzględnego C_p i C_v oraz współczynnik rozszerzalności cieplnej wynoszą zero.

6.7. Przemiany gazu doskonałego

Przejęcie układu z jednego stanu do drugiego nazywamy przemianą lub procesem. W rozdziale tym omówione zostaną przemiany gazu doskonałego. Rozpatrzone będą następujące przemiany: izochoryczna, izobaryczna, izotermiczna, adiabatyczna oraz przemiana politropowa. Dla każdej przemiany poszukiwać będziemy pracy zewnętrznej (wzór 19), pracy technicznej (wzór 46), entropii oraz ciepła przemiany.

Przemiana izochoryczna

Przemiana, w której objętość właściwa jest stała, czyli

$$V = \text{const} \text{ lub } dV = 0$$

nazywamy przemianą izochoryczną.

Zmiennymi parametrami są ciśnienie p i temperatura T .

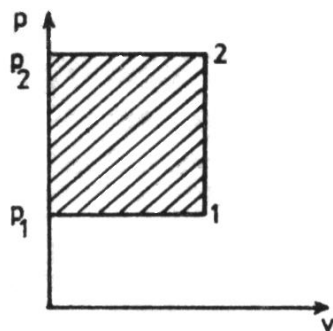
Równanie stanu gazu doskonałego

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

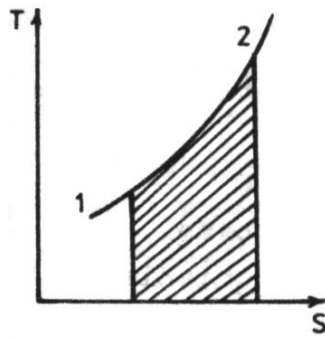
przekształca się w równanie

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (\text{prawo Charlesa}) \quad (134)$$

Na Rys.52. przedstawiono przemianę izochoryczną na wykresie $p - V$, a na Rys.53. – na wykresie $T - S$.



Rys.52. Przemiana izochoryczna. Zakreskowane pole oznacza pracę techniczną w tej przemianie.



Rys.53. Przemiana izochoryczna. Zakreskowane pole oznacza dostarczone ciepło.

I zasada termodynamiki

$$dQ = dU + pdV$$

przy warunku $dV = 0$, daje

$$dQ = dU = C_v(T_2 - T_1)$$

Dostarczone ciepło powiększa więc energię wewnętrzną ciała.

Praca zewnętrzna (praca sił ciśnienia), zdefiniowana ogólnie zależnością (112), którą przedstawia zakreskowane pole na wykresie $p - V$ pod krzywą przemiany (Rys.47.) wynosi z uwagi na warunek $dV = 0$, również zero. Praca techniczna jest zdefiniowana zależnością

$$W_t = -\int_1^2 V dp \quad (135)$$

i na wykresie $p-V$ (wykres $p-V$ nosi nazwę wykresu pracy) wyraża się zakreskowanym polem zawartym między krzywą przemiany, osią p oraz liniami poziomymi, przeprowadzonymi z punktu początkowego i końcowego przemiany – Rys.52.

Zmianę entropii w tej przemianie obliczymy korzystając z równania (127)

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

Dla gazu doskonałego

$$dQ = dU + pdV = C_v dT + pdV,$$

stąd :

$$dS = C_v \frac{dT}{T} + \frac{pdV}{T}.$$

Z równania stanu gazu doskonałego ($p \cdot V = R \cdot T$) mamy

$$\frac{p}{T} = \frac{R}{V}$$

więc

$$\int_1^2 dS = C_v \int_1^2 \frac{dT}{T} + R \int_1^2 \frac{dV}{V}.$$

Powyzsze równanie po scałkowaniu między stanem 1 i 2 prowadzi do wyniku

$$dS = C_v \int_1^2 \frac{dT}{T} + R \int_1^2 \frac{dV}{V},$$

$$S_2 - S_1 = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (136)$$

Zmianę entropii w przemianie izochorycznej oblicza się równaniem (136) ma więc postać

$$S_2 - S_1 = C_v \ln \frac{T_2}{T_1}$$

i na wykresie T – S jest krzywą logarytmiczną - Rys.53.

Równanie (136) wyrażające zmianę entropii gazu doskonałego może być przedstawione w innej postaci. W tym celu skorzystajmy z równania na entalpię gazu

$$I = U + pV \quad (137)$$

gdzie I jest tak jak i energia wewnętrzna U oraz entropia S również funkcją stanu.

Zróżniczkujemy powyższe równanie:

$$dI = dU + d(pV)$$

skąd

$$dI = dU + pdV + Vdp,$$

ale

$$dU = \underline{dQ} - pdV \quad (\text{I zasada termodynamiki}),$$

więc

$$dI = \underline{dQ} + Vdp$$

i ostatecznie

$$\underline{dQ} = dI - Vdp. \quad (138)$$

Dla przemiany, w której $p = \text{const}$ ($dp=0$) powyższe równanie przekształca się

$$\underline{dQ}_p = dI, \quad (139)$$

gdzie

$$\underline{dQ}_p = C_p dT \quad (140)$$

stąd na podstawie równań (139) i (140) równanie (138) postać

$$\underline{dQ} = C_p dT - V dp, \quad (141)$$

Z równania stanu gazu

$$pV = RT$$

mamy

$$\frac{V}{T} = \frac{R}{p},$$

stąd

$$\underline{dQ} = dST = C_p dT - V dp,$$

i

$$dS = C_p \frac{dT}{T} - \frac{V}{T} dp,$$

a dalej

$$dS = C_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}, \quad (142)$$

Całkowanie równania (142) między stanem 1 i 2 daje ostatecznie

$$S_2 - S_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (143)$$

Przemiana izobaryczna

Przemiana, w której ciśnienie jest stałe, czyli

$$p = \text{const} \text{ lub } dp = 0$$

nazywamy przemianą izobaryczną.

Zmiennymi parametrami są objętość V i temperatura T .

Równanie stanu gazu

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2},$$

przekształca się w równanie

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}, \quad (144)$$

które nosi nazwę równania Gay—Lussaca.

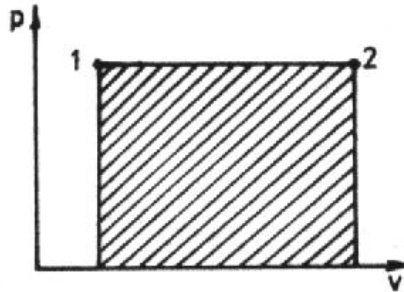
Ciepło przemiany izobarycznej wynosi:

$$\underline{dQ} = dI - V dp = dI \quad (\text{patrz równanie (138)}),$$

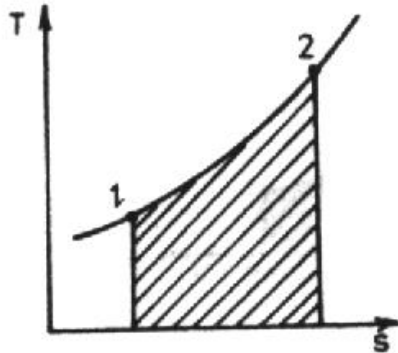
czyli

$$Q_{1,2} = I_2 - I_1 = C_p(T_2 - T_1)$$

dostarczone ciepło jest równe przyrostowi entalpii ciała. Przemiana ta została przedstawiona na Rys.54. i 55. w układach P—V i T—S



Rys.54. Przemiana izobaryczna. Zakreskowane pole oznacza pracę zewnętrzną.



Rys.55. Przemiana izobaryczna. Zakreskowane pole oznacza dostarczone ciepło.

Praca zewnętrzną przemiany izobarycznej wynosi: $dW = -pdV$

natomiast praca techniczna: $dW_t = -Vdp = 0$

Zmiana entropii obliczona z zależności (143)

$$S_2 - S_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1}$$

jest krzywą logarymiczną – Rys.55.

Przemiana izotermiczna

Przemiana w której temperatura jest stała, czyli:

$$T = \text{const} \text{ lub } dT = 0$$

nazywamy przemianą izotermiczną.

Zmiennymi parametrami są objętość V i ciśnienie p.

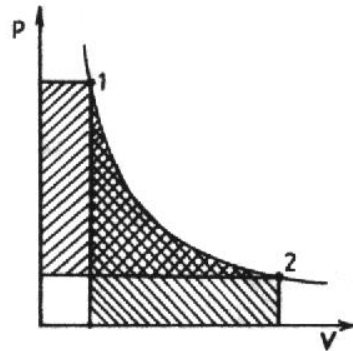
Równanie stanu gazu doskonałego

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2},$$

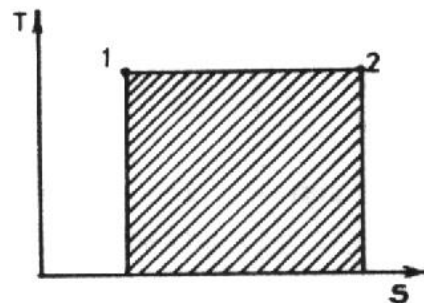
przekształca się w równanie

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 = RT \quad (145)$$

i nazywamy je prawem Boyle'a—Mariotte'a. Przemiana ta została przedstawiona na Rys.56. i 57. w układach p-V i T-S.



Rys.56. Przemiana izotermiczna. Zakreskowane pola są sobie równe i przedstawiają pracę zewnętrzną i pracę techniczną.



Rys.57. Przemiana izotermiczna. Zakreskowane pole oznacza dostarczone ciepło.

Ciepło przemiany izotermicznej obliczymy z I zasady termodynamiki

$$\underline{dQ} = \underline{dU} - \underline{dW} = C_v dT - dW = -dW$$

Z powyższego równania wynika, że jest ono równe pracy zewnętrznej. Pracę techniczną wyznaczmy z zależności (141):

$$\underline{dQ} = \underline{dU} + \underline{dW}_t$$

stąd

$$\underline{dQ} = C_p dT + \underline{dW}_t = \underline{dW}_t.$$

Również i w tym przypadku ciepło przemiany izotermicznej równa się pracy technicznej.

Energia wewnętrzna oraz entalpia w przemianie izotermicznej dla gazu doskonałego jest stała, co wynika z poniższych równań

$$dU = C_v dT = 0$$

oraz

$$dI = C_p dT = 0$$

Praca zewnętrzna przemiany izotermicznej wynosi:

$$W_{1,2} = -\int_1^2 p dV$$

Dla przemiany izotermicznej zachodzi

$$p V = p_1 V_1 = RT$$

więc

$$W_{1,2} = p_1 V_1 \int_1^2 \frac{dV}{V} = -RT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (146)$$

lub

$$W_{1,2} = -RT \ln \frac{p_1}{p_2}, \quad (147)$$

ponieważ

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

i

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

Pracę techniczną i ciepło przemiany izotermicznej obliczamy w podobny sposób, natomiast entropia przedstawia się zależnością

$$S_2 - S_1 = \frac{Q_{1,2}}{T} = R \ln \frac{V_2}{V_1} = R \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (148)$$

Przemiana adiabatyczna

Przemianę, która odbywa się bez wymiany ciepła z otoczeniem czyli

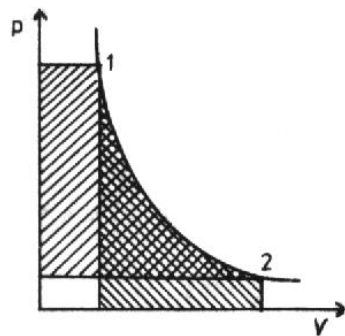
$$Q_{1,2} = \text{const}, \text{ lub } dQ = 0$$

nazywamy przemianą adiabatyczną.

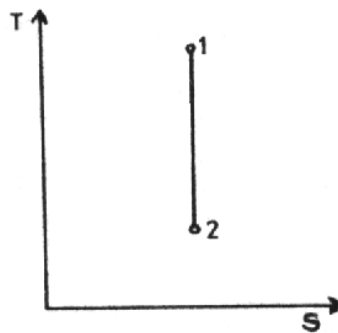
Z definicji entropii dla przemiany odwracalnej wynika, że

$$dS = \frac{dQ}{T} = 0$$

Entropia w przemianie adiabatycznej jest więc stała.
 Przemianę adiabatyczną przedstawiają Rys.58 i 59.
 Są one wykresami równania adiabaty zapisanego wzorem (151)



Rys.58.Przemiana adiabatyczna.
 Zakreskowane pola przedstawiają pracę zewnętrzną (pod krzywą i osią V) oraz pracę techniczną (od osi p do krzywej).



Rys.59. Przemiana adiabatyczna.

I zasada termodynamiki daje

$$\underline{dQ} = dU + pdV = 0$$

Podstawiając

$$dU = C_v dT$$

i różniczkując obustronnie równanie stanu gazu doskonałego

$$pV = RT$$

czyli

$$d(pV) = RdT$$

$$\frac{pdV + Vdp}{R} = dT$$

mamy

$$C_v dT + pdV = 0$$

względnie

$$\frac{C_v}{R}(pdV + Vdp) + pdV = 0 \quad (149)$$

Przekształćmy wyrażenie $\frac{C_v}{R}$,

$$\frac{C_v}{R} = \frac{C_v}{C_p - C_v} = \frac{1}{\kappa - 1}$$

Wyrażenie (149) wobec powyższej zależności można przepisać

$$\frac{1}{\kappa - 1}(pdV + Vdp) + pdV = 0$$

a po redukcji wyrazów podobnych

$$\kappa pdV + Vdp = 0$$

Po podzieleniu obu stron powyższego równania przez pV , otrzymujemy różniczkowe równanie adiabaty

$$\kappa \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0 \quad (150)$$

Jeżeli scałkujemy powyższe równanie od stanu 1 do stanu 2, to otrzymamy jedno z równań Poissona (151)

$$\kappa \int_1^2 \frac{dV}{V} = - \int_1^2 \frac{dp}{p}$$

dalej

$$\kappa \ln \frac{V_2}{V_1} + \ln \frac{p_2}{p_1} = 0$$

$$\ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\kappa \frac{p_2}{p_1} = 0$$

$$\frac{V_2^\kappa p_2}{V_1^\kappa p_1} = 1$$

i ostatecznie

$$V_1^\kappa p_1 = V_2^\kappa p_2$$

Dalsze równanie Poissona otrzymamy korzystając z wyprowadzonej zależności (151) oraz korzystając z równań stanu gazu doskonałego np.:

$$p_1 V_1 = RT_1 \quad \text{stąd} \quad p_1 = R \frac{T_1}{V_1} \quad \text{lub} \quad V_1 = R \frac{T_1}{p_1}$$

lub

$$p_2 V_2 = RT_2 \quad \text{stąd} \quad p_2 = R \frac{T_2}{V_2} \quad \text{lub} \quad V_2 = R \frac{T_2}{p_2}$$

Równanie (151) można więc zapisać następująco

$$R \frac{T_1}{V_1} V_1^\kappa = R \frac{T_2}{V_2} V_2^\kappa$$

stąd kolejne równanie Poissona ma postać

$$T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1} \quad (152)$$

lub

$$p_1 \left(R \frac{T_1}{p_1} \right)^\kappa = p_2 \left(R \frac{T_2}{p_2} \right)^\kappa$$

i po uporządkowaniu mamy ostatnie równanie adiabaty Poissona

$$p_1^{1-\kappa} T_1^\kappa = p_2^{1-\kappa} T_2^\kappa \quad (153)$$

względnie po wyciągnięciu z obu stron równania (153) pierwiastka κ - tego stopnia mamy

$$T_1 p_1^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = T_2 p_2^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \quad (154)$$

Praca zewnętrzna w przemianie adiabatycznej wynosi

$$\underline{dQ} = dU - \underline{dW} = 0$$

stąd

$$\underline{dW} = dU = U_1 - U_2 = C_v (T_1 - T_2) \quad (155)$$

i zostaje ona wykonana kosztem spadku energii wewnętrznej.

Praca techniczna zostaje wykonana kosztem spadku entalpii co wynika z zależności (156), ponieważ

$$\underline{dQ} = dI + \underline{dW}_t = 0$$

stąd

$$\underline{dW}_t = -dI = I_1 - I_2. \quad (67)$$

Dzieląc zależność (156) przez (155)

$$\frac{\underline{dW}_t}{\underline{dW}} = \frac{I_1 - I_2}{U_1 - U_2} = \frac{C_p (T_1 - T_2)}{C_v (T_1 - T_2)} = \frac{C_p}{C_v} = \kappa$$

Przemiana politropowa

Przemiana, w której ciepło właściwe C jest stałe, czyli

$$\frac{dQ}{dT} = C = \text{const} \quad (157)$$

nazywamy przemianą politropową.

Równanie politropy wyprowadzimy z I zasady termodynamiki

$$\underline{dQ} = C_v dT + p dV \quad (158)$$

z (157) mamy

$$\underline{dQ} = C dT$$

więc równanie (158) przepiszemy

$$C dT = C_v dT + p dV. \quad (159)$$

Wyrażenie dT możemy wyznaczyć z równania stanu gazu doskonałego ($p \cdot V = R \cdot T$) czyli

stąd

$$d(pV) = R dT$$

$$\frac{pdV + Vdp}{R} = dT$$

Równanie (159) wobec powyższej zależności piszemy

$$\frac{C - C_v}{R} (pdV - Vdp) - pdV = 0. \quad (160)$$

Przekształćmy wyrażenie $\frac{C - C_v}{R}$

$$\frac{C - C_v}{R} = \frac{C - C_v}{C_p - C_v} = \frac{1}{\frac{C_p - C_v}{C - C_v}} = \frac{1}{\frac{C - C_v - C - C_p}{C - C_v}} = \frac{1}{1 - \frac{C - C_p}{C - C_v}}$$

Oznaczając $\frac{C - C_p}{C - C_v} = n = \text{const}$, mamy

$$\frac{C - C_v}{R} = \frac{1}{1 - n},$$

a stąd

$$C = C_v \frac{n - \kappa}{n - 1} \quad (161)$$

Wyrażenie (160) przyjmuje więc postać

$$\frac{1}{1 - n} (pdV + Vdp) - pdV = 0,$$

a po dalszych przekształceniach

$$p dV + V dp - p dV + n p dV = 0$$

$$V dp + n p dV = 0$$

i ostatecznie po obustronnym podzieleniu przez $p V$ mamy

$$n \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0 \quad (162)$$

Równanie (162) ma postać równania adiabaty (150) dla $\kappa = n$. Przemiana adiabatyczna jest więc szczególnym przypadkiem politropowej przemiany. Rozwiązaniem równania różniczkowego politropy (162) jest równanie (163)

$$p_1 V_1^n = p_2 V_2^n, \quad (163)$$

które ma identyczną postać jak jedno z równań Poissona dla $n = \kappa$ (patrz równanie 151) i otrzymuje się w identyczny sposób jak w przypadku przemiany adiabatycznej.

Zmiana entropii gazu doskonałego w przemianie politropowej wynosi

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = C \int_1^2 \frac{dT}{T} = C \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Politropa jest przemianą, która jako szczególny przypadek zawiera wszystkie powyżej omówione przemiany gazowe.

Poniższa tabela ilustruje powyższą tezę pokazując zależności między wykładnikiem politropy n a wynikającym ze wzoru (161) ciepłem właściwym politropy c dla różnych przemian gazowych.

Wykładnik politropowy	Ciepło właściwe politropy	Rodzaj przemiany
n	c	
1	∞	izoterma
κ	0	adiabata
0	C_p	izobara
∞	C_v	izochora

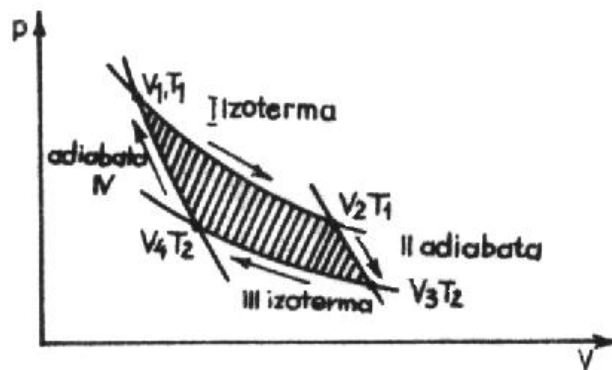
6.8. Obiegi termodynamiczne

Weźmy idealną maszynę pracującą bez strat (cykl odwracalny) i wykonującą cykl zamknięty, przy czym ciałem podlegającym przemianom cyklicznym jest gaz doskonały.

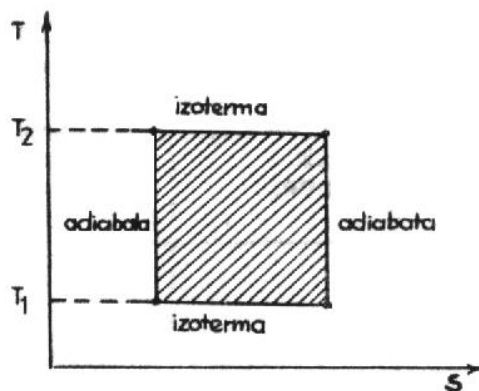
O takiej maszynie mówimy, że wykonuje ona zamknięty cykl Carnota.

Cykl Carnota składa się z następujących przemian – Rys. 60 i 61.

- rozprężenie izotermiczne od objętości V_1 do V_2 w stałej temperaturze T_1
- rozprężenie adiabatyczne od objętości V_2 do V_3 i od temperatury T_1 do T_2
- sprężenie izotermiczne od objętości V_3 do V_4 w stałej temperaturze T_2 sprężenie adiabatyczne od objętości V_4 do V_1 i od temperatury T_2 do T_1



Rys.60. Cykl Carnota we współrzędnych p—V. Zakreskowane pole przedstawia pracę wykonaną przez układ.



Rys.61. Cykl Carnota we współrzędnych T—S.

Dla cyklu II i IV (procesy adiabatyczne) możemy napisać równanie Poissona

$$V_3^{\kappa-1} T_2 = V_2^{\kappa-1} T_1$$

$$V_4^{\kappa-1} T_2 = V_1^{\kappa-1} T_1$$

Po podzieleniu stronami otrzymujemy

$$\left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\kappa-1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1}$$

czyli

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1} \quad (164)$$

Praca wykonana w cyklu izotermicznego sprężenia (cykl III) wynosi (patrz wzór 146)

$$W_3 = RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}$$

lub wobec równania (146)

$$W_3 = -RT_2 \ln \frac{V_1}{V_2} \quad (165)$$

Suma prac w procesach adiabatycznych wynosi

$$W_2 + W_4 = C_v(T_2 - T_1) + C_v(T_2 - T_1) = 0$$

Suma prac wykonanych i pobranych w cyklu Carnota wynosi

$$W_1 = RT_1 \ln \frac{V_1}{V_2} \quad \text{- wzór (57), więc}$$

$$W = W_1 + W_3 = RT_1 \ln \frac{V_1}{V_2} - RT_2 \ln \frac{V_1}{V_2} = R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_1}{V_2}$$

Z I zasady termodynamiki dla przemiany termodynamicznej gazu doskonałego mamy

$$W_1 = -Q_1$$

$$W_3 = -Q_2$$

czyli

$$W = -(Q_1 + Q_2).$$

Sprawnością cyklu termodynamicznego nazywamy wyrażenie

$$\eta = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} \quad (166)$$

Dla silnika Carnota zależność (166) prowadzi do rezultatu

$$\eta = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} = \frac{|W|}{|W_1|} = \frac{R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_1}{V_2}}{RT_1 \ln \frac{V_1}{V_2}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (167)$$

Wielkość T_1 jest temperaturą „źródłem ciepła”, -- T_2 —temperaturą „chłodnicy”. Warunkiem pracy silnika Carnota jest istnienie różnicy temperatur między źródłem ciepła i chłodnicą. Można wykazać, że przy danych temperaturach źródła ciepła i chłodnicy sprawność dowolnego cyklu odwracalnego nie zależy od użytego czynnika i równa się sprawności cyklu Carnota. Jeżeli dowolny cykl odwracalny podzielimy na wielką liczbę bardzo wąskich cykli Carnota, to sprawność takiego cyklu obliczona między najwyższą i najniższą temperaturą nie może być większa niż sprawność cyklu Carnota przeprowadzonego między danymi temperaturami. Ze wszystkich cykli termodynamiczny odwracalny cykl Carnota ma największą sprawność. Sprawność silników rzeczywistych pracujących w procesach nieodwracalnych jest oczywiście niższa niż sprawność silnika Carnota.

Cykl Carnota można przeprowadzić również w kierunku odwrotnym, to jest rozpoczynając od adiabatycznego rozprężania od temperatury T_1 do T_2 – cykl IV na Rys.60.

Kolejne przemiany „odwrotnego” cyklu Carnota to izotermiczne rozprężanie w temperaturze T_2 (III), adiabatyczne sprężanie od temperatury T_2 do T_1 (II), izotermiczne sprężanie w temperaturze T_1 (I). Powoduje to zmianę znaków ΔQ i ΔW na każdym z odcinków bez zmiany wartości bezwzględnej tych wielkości. Podczas cyklu nad układem zostaje wykonana praca

$$\underline{\Delta W} = R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Układ pobiera z chłodnicy ciepło Q_2

$$Q_2 = RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

i oddaje grzejnikowi ciepło

$$Q_1 = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Całkowite ciepło oddane przez układ w całym cyklu wynosi

$$\underline{\Delta Q} = Q_1 - Q_2 = R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Praca wykonana nad układem $\underline{\Delta W} = \underline{\Delta Q}$, czyli praca wykonana nad układem zostaje przekazana otoczeniu w postaci ciepła. Oznacza to, że w „odwrotnym” cyklu Carnota możemy pobierać ciepło Q_2 z ciała chłodniejszego i przekazywać ciału cieplejszemu. Urządzenie pracujące „odwrotnym” cyklem Carnota mogą służyć więc albo jako chłodziarka albo pompa ciepła. Sprawność chłodzenia chłodziarki definiujemy jako stosunek ciepła Q_2 pobranego z ciała chłodniejszego do pracy $\underline{\Delta W}$, jaka musi być zużyta w tym celu:

$$\eta_c = \frac{Q_2}{\underline{\Delta W}}$$

Dla chłodziarki pracującej w cyklu Carnota (ciałem jest gaz doskonały), współczynnik sprawności wynosi

$$\eta_c = \frac{T_2}{T_2 - T_1}. \quad (168)$$

Sprawność pompy ciepłej zależy od stosunku ilości ciepła Q_1 dostarczonego ciału w wyższej temperaturze do ilości pracy zużytej w tym celu

$$\eta_p = \frac{Q_1}{\underline{\Delta W}}.$$

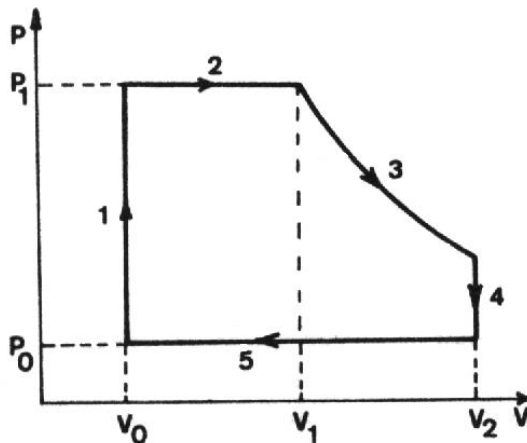
Pompa ciepła pracująca w cyklu Carnota posiada sprawność

$$\eta_p = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \quad (169)$$

Następujący przykład liczbowy uzasadni tezę, że z punktu widzenia fizyki bezpośrednia zmiana pracy na ciepło jest niekorzystna. Niech przy zewnętrznej temperaturze otoczenia $T_2 = 237 \text{ K}$ należy utrzymać w pomieszczeniu temperaturę 293 K . Obliczając η_p zależnością (169) otrzymujemy $\eta_p \approx 14,7$, czyli dostarczenie Q_1 dzuły ciepła wymaga jedynie pracy $\Delta W = Q_1/14,7$. Tylko fakt, że pompy ciepłne są urządzeniami dość drogimi i skomplikowanymi powoduje że ich rozpowszechnienie jest obecnie małe.

Zasadniczą cechą różniącą wszystkie silniki rzeczywiste od idealnego silnika Carnota, jest stała wymiana substancji roboczej. Rozprężoną substancję roboczą usuwa się, a na jej miejsce wprowadza się nowe porcje. W ten sposób uzyskuje się przyspieszenie wymiany cieplnej.

Najdawniej znanym silnikiem cieplnym jest maszyna parowa (parowy silnik tłokowy). Obieg roboczy maszyny parowej (Rys.62.) składa się z następujących procesów:

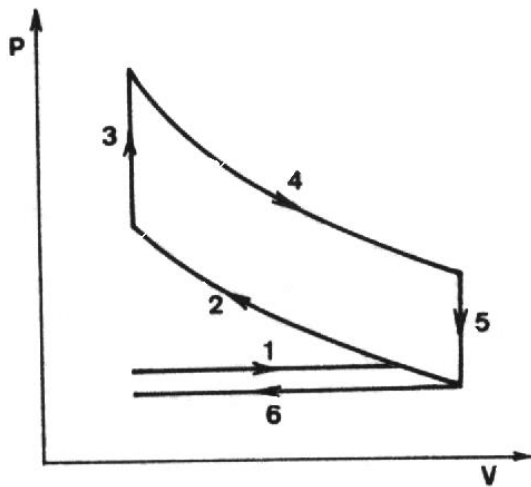


Rys.62. Cykl roboczy maszyny parowej przy współrzędnych p—V.

- Cykl 1- przy otwartym dostępie pary z kotła izochoryczne sprężenie pary od wartości ciśnienia atmosferycznego p_0 , do wartości p_1 , równej ciśnieniu pary w kotle. Tłok znajduje się w pobliżu swego skrajnego położenia.
- Cykl 2- Tłok przesuwa się. Przy stałym otwartym dostępie pary z kotła objętość wypełniona parą wzrasta od wartości początkowej V_0 do V_1 . Ciśnienie pary jest równe ciśnieniu pary w kotle.
- Cykl 3- dopływ pary z kotła zostaje zamknięty. Tłok przesuwa się w dalszym ciągu powodując adiabaticzne rozprężanie od V_1 do V_2 .
- Cykl 4- Przy skrajnym położeniu tłoka otwiera się wylot pary z cylindra. Ciśnienie pary pod tłokiem spada przy stałej objętości V_2 do wartości p_0 .
- Cykl 5- Para z cylindra wydostaje się na zewnątrz. Objętość pary pod tłokiem maleje przy stałym ciśnieniu p_0 do wartości V_0 .

Sprawność maszyn parowych przekracza 20 %. Przyczyną małej sprawności silników parowych są straty cieplne oraz to, że cykl roboczy odbiega od cyklu Carnota.

Kolejne fazy niskopiętnego silnika spalinowego czterosuwowego przedstawia Rys. 63.



Rys.63. Cykl pracy silnika niskopiętnego.

Źródłem ciepła jest wybuchowa mieszanka powietrza i pary benzyny wprowadzana bezpośrednio do cylindra. Powoduje to praktycznie natychmiastowe uruchomienie silników. Obieg roboczy składa się z następujących procesów:

- 1- izobaryczne zasysanie mieszanki do cylindra (pierwszy suw)
- 2- adiabatyczne sprężanie mieszanki (drugi suw)
- 3- przy skrajnym położeniu tłoka izochoryczne spalanie mieszanki
- 4- adiabatyczne rozprężanie gazów spalinowych (trzeci suw)
- 5- przy skrajnym położeniu tłoka otwarcie zaworu wydechowego i izochoryczne obniżanie ciśnienia gazów spalinowych w cylindrze do ciśnienia atmosferycznego
- 6- izobaryczne wydalenie spalin z cylindra (czwarty suw)

Sprawność niskopiętnych silników spalinowych wynosi około 30% i jest ograniczona stosunkiem sprężenia (stosunek maksymalnej objętości cylindra do objętości minimalnej). Zbyt duży stosunek sprężenia – ponad 10 – powoduje wzrost temperatury mieszanki i przedwczesny samozapłon mieszanki przed osiągnięciem przez tłok skrajnego położenia.

Znacznie większy stopień sprężenia (i sprawność około 40%) osiąga się w wysokopiętnych silnikach spalinowych czterosurowych (silniki Diesla). Cykl pracy silnika Diesla przedstawiono – patrz zadanie 27. W silnikach Diesla nie są potrzebne świece zapłonowe i elektryczne aparaty zapłonowe.

W silnikach czterosurowych jeden takt roboczy w cylindrze – rozprężanie gazów spalinowych – przypada na dwa pełne obroty wału silnika. W celu uzyskania równomiernej pracy stosuje się więc układy wielocylindrowe przy czym takty robocze kolejnych cylindrów przesunięte są względem siebie w fazie o taką samą część okresu obrotu wału.

Niskopiętne silniki benzynowe charakteryzują się lekkością wagi oraz „elastycznością”, która pozwala bardzo szybko zmieniać szybkość obrotów. Z tego – powodu znalazły one zastosowanie w samochodach osobowych. Silniki wysokopiętne są znacznie cięższe i mniej „elastyczne”. Stosujemy je w samochodach ciężarowych, parowozach spalinowych, okrętach.

Oprócz silników tłokowych używane są silniki turbinowe parowe lub spalinowe. W silnikach turbinowych strumień sprężonego gazu działa na łopatki wirnika turbiny. Obecnie tam, gdzie nie jesteśmy ograniczeni wagą silnika, a zależy nam na tańszym paliwie (węgiel, mazut, gaz ziemny) stosujemy prawie wyłącznie turbiny parowe (elektrownie).

W silnikach pulsacyjnoodrztowych i turbodrztowych (samolot) wykorzystywany jest odrzut gazów spalinowych wyrzucanych z komory spalania przez odpowiednio ukształtowaną dyszę wylotową.

Silniki raketowe (rakiety) różnią się od silników odrztowych tym, że tlen potrzebny do reakcji spalania w komorze np. ciepły tlen, podawany jest do komory spalania jednocześnie z paliwem.

6.9. Zadania do rozdziału 6

- 6.9.1. Objętość ciał V zależna jest od temperatury, od temperatury zależna jest więc gęstość ciał. Znaleźć zmianę gęstości w funkcji zmiany temperatury.
- 6.9.2. Znaleźć masę jednej cząsteczki wodoru, azotu, wody.
- 6.9.3. Ile atomów zawiera się w 1 cm^3 aluminium? Gęstość aluminium wynosi $2.7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.
- 6.9.4. W warunkach normalnych objętość właściwa pewnego gazu wynosi $V = 5.6 \text{ m}^3$. Znaleźć ciężar cząsteczkowy gazu. Co to jest za gaz?
- 6.9.5. Obliczyć średnią prędkość kwadratową cząstek wodoru, zakładając, że jest on gazem doskonałym. W obliczeniach przyjąć warunki normalne, tj. ciśnienie $p = \text{atm}$, $t = 0^\circ \text{ C}$, gęstość $\rho = 8.99 \cdot 10^{-2} \text{ kg/m}^3$.
- 6.9.6. Wodę o objętości 2.5 l i temperaturze 10° C ogrzano w ciągu 10 min . Do temperatury 100° C . Znaleźć moc grzejnika.
- 6.9.7. Jakie ciśnienie na ścianki naczynia wywiera 0.02 kg tlenu zajmującego objętość 0.2 m^3 w temperaturze 40° C ? Jakiej zmianie ulegnie otrzymany wynik, jeżeli zamiast tlenu O_2 w naczyniu tym byłby wodór H_2 ?
- 6.9.8. Do mosiężnego kalorymetru o masie 128 g , zawierającego 245 g wody o temperaturze 10° C , wrzucono ciało o masie 200 g i temperaturze 100° C . Końcowa temperatura kalorymetru była 20° C . Znaleźć ciepło właściwe ciała wrzuconego do kalorymetru.
- 6.9.9. Z następujących danych wyznaczyć wartość mechanicznego równoważnika ciepła: do układu dostarczono 2000 cal ciepła, w ciągu tego czasu układ wykonał pracę zewnętrzną równą 3350 J . W czasie tego procesu energia wewnętrzna wzrosła o 5030 J .
- 6.9.10. Przy izotermicznym sprężaniu 2.8 kg tlenku węgla objętość jego zmniejszyła się cztery razy. Obliczyć pracę wykonaną przy sprężaniu, jeżeli temperatura równa się 7° C .
- 6.9.11. Idealna chłodziarka wykorzystująca odwrotny cykl Carnota odbiera podczas jednego cyklu 2.8 kJ ciepła oziębionego przez nią ciała o temperaturze -10° C oraz przekazuje pewną ilość ciepła ciału o temperaturze 17° C . Znaleźć sprawność cyklu, ilość przekazaną ciału cieplejszemu w ciągu jednego cyklu oraz współczynnik chłodzenia chłodziarki.
- 6.9.12. Obliczyć zmianę entropii dwóch mas wody, masy $m_1 = 10 \text{ g}$ o temperaturze $t_1 = 100^\circ \text{ C}$

oraz masy $m_2 = 20$ g o temperaturze $t_2 = 15^\circ \text{C}$, powstałą wskutek wymieszania tych mas ze sobą.

7. ELEKTRYCZNOŚĆ I MAGNETYZM

7.1. Podstawowe pojęcia analizy wektorowej. Twierdzenia teorii pola

Dział fizyki, obejmujący prawa określające zachowania się i oddziaływanie obiektów materialnych obdarzonych ładunkiem elektrycznym oraz opis towarzyszących temu oddziaływaniu zjawisk, nosi nazwę nauki o elektryczności i magnetyzmie.

Podstawowymi pojęciami w elektrodynamice są pola elektromagnetyczne oraz ich źródła, którymi są ciała materialne obdarzone ładunkiem elektrycznym.

Przez „pola” rozumiemy przestrzenny rozkład liczby (pole skalarne) lub wektora (pole wektorowe).

Polem skalarnym lub (polem skalarów) nazywamy funkcję, która każdemu punktowi obszaru V przyporządkowuje określony skalar; funkcję taką nazywamy funkcją skalarną. W układzie kartezjańskim prostokątnym $Oxyz$ funkcja ta zależy od trzech zmiennych:

$$f = f(x, y, z), \quad x, y, z \in V$$

Pole skalarne jest matematycznym abstraktem takich wielkości fizycznych, które w każdym punkcie obszaru charakteryzują się tylko liczbą. Przykładem pola fizycznego, które z punktu widzenia matematyki jest polem skalarnym, jest pole temperatury ciała, pole gęstości poszczególnych punktów danego ciała.

Polem wektorowym (lub polem wektorów) nazywamy funkcję, która każdemu punktowi pewnego obszaru przyporządkowuje określony wektor; funkcję taką nazywamy funkcją wektorową.

W układzie kartezjańskim $Oxyz$ pole wektorowe zapisujemy za pomocą współrzędnych następująco

$$\vec{A} = A_x(x, y, z) \vec{i} + A_y(x, y, z) \vec{j} + A_z(x, y, z) \vec{k}$$

gdzie A_x, A_y, A_z są składowymi wektora \vec{A} ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ wersorami (wektorami jednostkowymi) współrzędnych x, y, z .

Powyższa definicja pola wektorowego wskazuje, że pole wektora jest równoważne trzem polom skalarnym jego składowych. Pole wektorowe jest matematycznym abstraktem takich wielkości fizycznych, które w każdym punkcie obszaru charakteryzują się liczbą i skierowaniem (kierunkiem i zwrotem). Przykładem pola fizycznego, które z punktu widzenia matematyki jest polem wektorowym, jest pole elektrostatyczne, pole grawitacyjne, pole magnetyczne, pole prędkości poszczególnych punktów ciała.

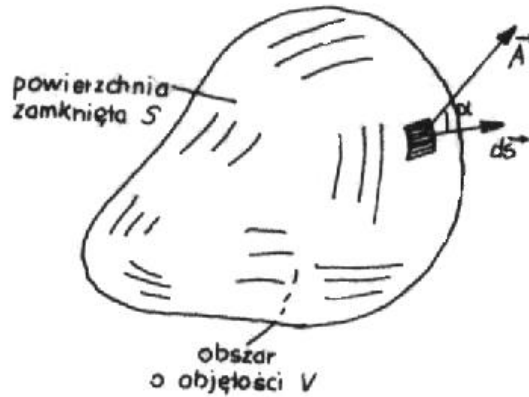
Obraz pola wektorowego możemy sobie wyobrazić rysując w wielu punktach przestrzeni wektory przedstawiające np. natężenie i kierunek w danym punkcie. Jeżeli teraz będziemy rysować w każdym punkcie linie styczne do tych wektorów, to otrzymamy linie sił pola wektorowego. Umownie przyjmuje się, że liczba linii sił przenikających przez powierzchnię jednostkową do nich prostopadłą jest proporcjonalna do natężenia pola.

Każde pole wektorowe charakteryzują dwie bardzo ważne wielkości: strumień pola oraz cyrkulacja (krążenia pola).

Strumieniem elementarnym $d\Phi$ wektora \vec{A} przez powierzchnię ds nazywamy iloczyn skalarny wektora \vec{A} i wektora elementu powierzchni \vec{ds} , gdzie wektor powierzchni \vec{ds} jest prostopadły do powierzchni; ma wartość równą polu tej powierzchni i jest zwrócony na zewnątrz tej powierzchni. Strumieniem całkowitym (skalarnym strumieniem pola wektorowego) nazywamy całkę powierzchniową

$$\Phi = \oint \vec{A} d\vec{S} = \oint A d \cos \alpha \quad (170)$$

gdzie α jest kątem między wektorem \vec{A} oraz $d\vec{s}$ – Rys.64.



Rys.64. Wzajemne kierunki wektora \vec{A} i wektora powierzchni $d\vec{s}$.

Cyrkulacja dowolnego pola wektorowego w odróżnieniu od strumienia jest związane z linią krzywą. Cyrkulacja K pola wektorowego wzdłuż dowolnej krzywej zamkniętej jest równa iloczynowi skalarnemu średniej wartości składowej stycznej wektora pola \vec{A} i długości $d\vec{l}$ elementu tej krzywej zamkniętej;

$$K = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (171)$$

gdzie całkowanie rozciąga się na całą długość obwodu krzywej zamkniętej C . Przyjmujemy, że wektor elementu długości $d\vec{l}$ jest dodatni, gdy zwrócony jest w stronę przeciwną do ruchu wskazówek zegara.

Pola wektorowe i skalarne można wyznaczyć lub wykreślić różnymi sposobami. Np. wzniesienie terenu naniesione na mapę warstwicową jest wielkością skalarną. Jeśli wyobrazimy sobie, że na powyższym wzniesieniu umieścimy kulę, która będzie dążyła do stoczenia się po zboczu, to w każdym punkcie tego wzniesienia potrzeba będzie określonej siły, aby nie pozwolić jej na stoczenie się. Między polem skalarnym wzniesienia a polem wektorowym sił działających na kulę istnieje oczywiście pewna zależność : wielkość siły zależy od stromości nachylenia.

Powyższy stopień zmian wzniesienia w funkcji zmian odległości jest pochodną – zależną jednak od kierunku poruszania się po zboczu. Nazywamy ją pochodną kierunkową.

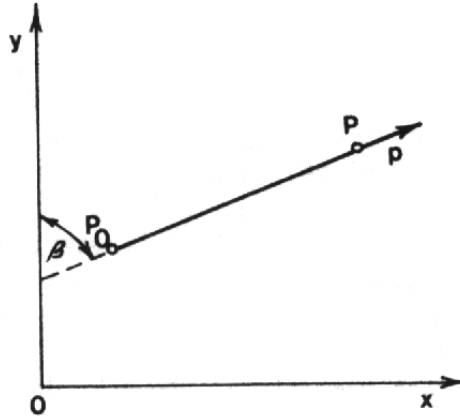
Dla funkcji $\varphi = \varphi(x, y)$ posiadającej ciągle pochodne cząstkowe w otoczeniu punktu $P_0(x_0, y_0)$ oraz wychodzący z tego punktu, leżący w płaszczyźnie x, y , promień p , pochodną w kierunku p (lub pochodną w kierunku α - Rys.65.) w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ definiujemy następująco:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \sin \alpha \quad (172)$$

lub

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{\varphi(P) - \varphi(P_0)}{|P_0 P|}, \quad (173)$$

przy czym punkt P zmierza do P_0 po danym promieniu p.



Rys.65. Interpretacja geometryczna pochodnej kierunkowej

W szczególnych przypadkach gdy $\alpha=0$ lub $\alpha = \frac{\pi}{2}$ otrzymujemy

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)_{\alpha=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{i} \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

czyli pochodne cząstkowe $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ i $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ są pochodnymi w dodatnim kierunku osi x i osi y.

Pochodna w kierunku p daje nam szybkość wzrostu funkcji $\varphi=\varphi(x,y)$ w kierunku promienia p. Jest ona równa tangensowi kąta nachylenia do promienia p stycznej do przekroju powierzchni $\varphi=\varphi(x,y)$ płaszczyzną pionową przechodzącą przez promień p.

Dla funkcji trzech zmiennych $\varphi=\varphi(x,y,z)$, pochodną kierunkową w kierunku promienia p określamy zależnością

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \gamma \quad (174)$$

gdzie α, β, γ to kąty, jakie tworzy promień p z osiami x,y,z.

Gradient

W układzie kartezjańskim funkcja pola skalarnego $\varphi(\vec{r})$ jest funkcją współrzędnych $\varphi(x,y,z)$ a przyrost funkcji pola (różniczką funkcji pola) wyraża zależność

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz.$$

Różniczkę tę można przedstawić w postaci iloczynu skalarnego dwóch wektorów

$$dp = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right) (\vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz) \quad (175)$$

Czynnik pierwszy powyższego iloczynu nazywamy gradientem funkcji φ

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \quad (176)$$

a drugi jest elementarnym przemieszczeniem $d\vec{r}$.

Gradient funkcji pola skalarnego φ przypisuje każdemu punktowi tego pola wektor, wyznacza więc pole wektorowe.

Wyrażenie (175) można więc zapisać

$$d\varphi = \text{grad}\varphi \cdot d\vec{r} \quad (177)$$

Powierzchnie, dla których $\varphi = \text{const}$, to znaczy $d\varphi = 0$ nazywamy powierzchniami ekwiskalarnymi. Dla powierzchni ekwiskalarnych równanie (176) daje:

$$\text{grad}\varphi \cdot d\vec{r} = 0$$

Oznacza to, że $\text{grad}\varphi$ jest wszędzie prostopadły do powierzchni ekwiskalarnych, natomiast przy dowolnym kierunku przemieszczania przyrost funkcji pola jest równy:

$$d\varphi = |\text{grad}\varphi| |d\vec{r}| \cos \alpha$$

gdzie α jest kątem między $\text{grad}\varphi$ a $d\vec{r}$.

Powyższe wyrażenie osiąga maksymalną wartość przy $\alpha = 0$.

Gradient wyznacza więc kierunek najwyższego wzrostu funkcji.

W fizyce przykładem gradientu funkcji skalarnej może być gradient temperatury określony przez pole prędkości przepływu ciepła w nierównomiernie ogrzewanej bryle metalu. Inne przykłady poznamy w dalszej części skryptu.

Stopień zmian natężenia pola w kierunku pola wektorowego lub w kierunku prostopadłym do pola określają: dywergencja (rozbieżność) pola wektorowego lub rotacja (wirowość) pola wektorowego.

Dywergencja

Jeżeli w układzie kartezjańskim wektor pola $\vec{A}(\vec{r})$ ma składowe w kierunku odpowiednich współrzędnych

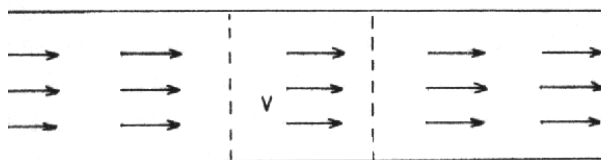
$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

to dywergencją (rozbieżnością) pola wektorowego \vec{A} nazywamy wyrażenie

$$\text{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (178)$$

Dywergencja wektora pola jest skalarem i zależy od położenia lecz nie jest z nią związane żadne pojęcie kierunku.

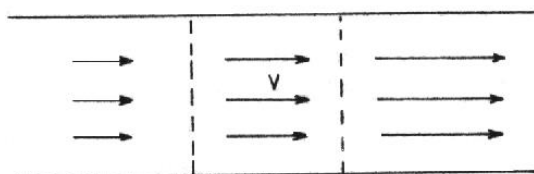
Na Rys.66. przedstawiono przewód rurowy, w którym płynie woda nieściśliwa. Linia przerywana oznacza pewien dowolny obszar, przez który przepływa woda. Woda może płynąć w dowolny sposób, jednak w taki sposób, aby ilość wody wpływającej równała się ilości wody wypływającej. Ponieważ ciecz jest nieściśliwa więc nie może rozchodzić się /lub zbiegać/ w jakimś punkcie. Nazwa „rozbieżność” pochodzi właśnie z tego ujęcia. Dla takiego pola piszemy $\text{div}\vec{v} = 0$. W wyróżnionym obszarze o objętości V nie może przybywać ani



ubywać cieczy.

Rys.66. Pole wektorowe prędkości cieczy nieściśliwej. W każdym punkcie $\text{div}\vec{v} = 0$. W wyróżnionym obszarze o objętości V nie może przybywać ani ubywać cieczy.

Na Rys.67. przedstawiono pole wektora prędkości rozszerzającego się gazu. W wyróżnionym obszarze prędkości cząstek wzrastają, więc $\text{div}\vec{v} \neq 0$



Rys.67. Pole wektora prędkości rozszerzającego się gazu. Prędkości cząstek wzrastają, więc $\text{div}\vec{v} \neq 0$.

Rotacja

Na początku rozdziału zdefiniowano zależnością (171) cyrkulację wektora \vec{A} jako całkę po konturze zamkniętej z iloczynu skalarnego wektora pola \vec{A} przez przemieszczenie elementarne \vec{dl} .

Element cyrkulacji jest równy

$$dK = \vec{A} \cdot \vec{dl}, \quad \text{stad} \quad K = \oint \vec{A} \cdot \vec{dl}, \quad (180)$$

lub

$$\oint_C \vec{A} \cdot \vec{dl} = \oint_S \text{rot}\vec{A} \cdot \vec{dS} \quad (181)$$

które brzmi następująco:

Całka krzywoliniowa danego wektora \vec{A} po krzywej zamkniętej C równa się strumieniowi rotacji tego wektora przez powierzchnię S, której brzegiem jest krzywa C (twierdzenie Stokesa).

Dywergencję i rotację można wykorzystać do przeprowadzenia klasyfikacji pól. Jeżeli w każdym punkcie obszaru

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0$$

to takie pole nazywamy solenoidalnym (beźródłowym) w tym obszarze. Jeżeli w każdym punkcie obszaru

$$\operatorname{rot}\vec{A} = 0$$

to takie pole nazywamy bezwirowym w tym obszarze.

Pola klasyfikujemy w następujący sposób:

Klasa I. Beźródłowe i bezwirowe gdzie

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0, \operatorname{rot}\vec{A} = 0$$

przykładem takich pól są np. pole elektrostatyczne i grawitacyjne w przestrzeni.

Klasa II. Bezwirowe ale nie beźródłowe, w których

$$\operatorname{rot}\vec{A} = 0, \operatorname{div}\vec{A} \neq 0$$

do tej klasy zaliczamy pola elektrostatyczne w środowisku naładowanym.

Klasa III. Beźródłowe ale nie bezwirowe, w których

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0, \operatorname{rot}\vec{A} \neq 0$$

np. pole magnetyczne wewnątrz przewodnika przewodzącego prąd stały.

Klasa IV. Pola nie beźródłowe i nie bezwirowe, w których

$$\operatorname{div}\vec{A} \neq 0, \operatorname{rot}\vec{A} \neq 0$$

np. pole prędkości w cieczy ściśliwej.

Równanie pola można zapisać również przy pomocy operatora różniczkowego ∇ (czytamy „nabla” lub „del”). Nazywamy go „operatorem różniczkowym”, gdyż oznacza on operację różniczkowania wielkości skalarnej lub wektorowej. Definicja operatora „nabla” (lub operatora Hamiltona) jest następująca:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (181)$$

jednakże operator ten nie jest wektorem w sensie geometrycznym, ponieważ nie możemy mu przypisać wielkości skalarnej.

Nie można również pytać o kierunek wektora ∇ . Można natomiast operator ∇ przekształcać jak wektor.

Jeśli będziemy działać operatorem nabla na jakąś wielkość skalarną φ , to otrzymamy wektor o określonej wartości i kierunku.

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \varphi \quad (182)$$

Wektor ten nazywamy gradientem pola skalarnego i nazywamy

$$\nabla\varphi = \text{grad}\varphi \quad (183)$$

Operatorem nabla można też działać na pola wektorowe. Jeżeli $A(x,y,z)$ oznacza pole wektorowe o składowych A_x, A_y, A_z będących różniczkowalnymi funkcjami zmiennych x,y,z , to:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (184)$$

Powyższe wyrażenie nazywamy dywergencją (rozbieżnością) pola wektorowego i formalnie traktujemy jako iloczyn skalarny operatora różniczkowego ∇ i wektora \vec{A} :

$$\nabla \cdot \vec{A} = \text{div}\vec{A}. \quad (185)$$

Iloczyn wektorowy ∇ i jakiegoś pola wektorowego \vec{A} jest rotacją tego pola

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k} = \text{rot}\vec{A} \end{aligned} \quad (186)$$

W zapisie wyznacznikowym rotację wektora \vec{A} zapisujemy następująco:

$$\text{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (187)$$

W zastosowaniu do zagadnień fizycznych, dużą rolę odgrywa rozbieżność gradientu zwana laplasjanem zapisywana jako $\nabla \cdot \nabla \varphi$ względnie $\nabla^2 \varphi$ (lub $\Delta \varphi$). Operator ∇^2 w układzie współrzędnych kartezjańskich wyrażamy zależnością

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (188)$$

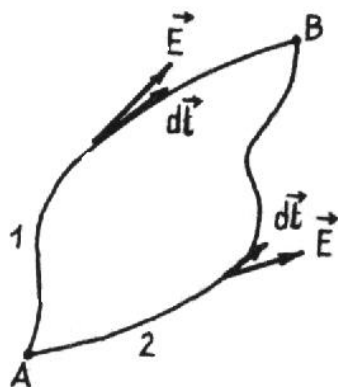
W zastosowaniu do skalaru, laplasjan tworzy pole skalarne, w zastosowaniu do wektora – pole wektorowe:

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \quad (189)$$

7.2. Potencjał skalarny i wektorowy

Jeżeli w polu wektorowym ustalimy dwa punkty A i B to całkę krzywoliniową między punktami A i B wzdłuż np. drogi 1 nazywamy potencjałem skalarnym φ_B w punkcie B ze względu na punkt A – Rys.68.

$$\varphi_B = \int_{/AB/_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (190)$$



Rys.68. Jeżeli $\int_{/AB/_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{/AB/_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ to $\text{rot } \vec{E} = 0$ i istnieje potencjał skalarny φ_B .

7.3. Pole elektrostatyczne. Prawo Coulomba

Opis pól elektrycznych i magnetycznych rozpoczniemy od opisu pola elektrostatycznego. W tym celu przeanalizujemy następujące cztery doświadczenia.

Doświadczenie I. Naelektryzujemy np. przez potarcie laskę ebonitową. O istnieniu pola sił w przestrzeni dookoła naelektryzowanego ciała możemy przekonać się za pomocą małej kulki próbnej o niewielkim ładunku elektrycznym, umieszczonej w dowolnym punkcie obszaru znajdującym się blisko naładowanego ciała. W każdym punkcie obszaru można określić natężenie pola elektrostatycznego \vec{E} , jego wartość oraz kierunek, mierząc siłę \vec{F} , jaka działa na kulę próbną, o jednostkowym ładunku elektrycznym dodatnim Q, pozostającą w danym punkcie w spoczynku

$$\vec{F} = Q\vec{E} \quad (191)$$

Równanie to jest słuszne dla każdego punktu pola, a ponieważ określa wartość i kierunki, więc jest równaniem pola wektorowego. Natężenie pola elektrycznego \vec{E} przedstawia zależność

$$\vec{E} = \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{Q} \quad (192)$$

Powyższy zapis oznacza, że wprowadzony do pola elektrycznego ładunek próbny Q nie wpływa na to pole. W układzie SI jednostką natężenia pola elektrycznego jest

$$[E] = \left[\frac{1N}{1C} \right] = \left[\frac{1N \cdot 1m}{1C \cdot 1m} \right] = \left[\frac{1J}{1C \cdot 1m} \right] = \left[\frac{1V}{1m} \right].$$

Doświadczenie II. Przesuwamy kulkę próbną o małym ładunku elektrycznym w obszarze, w którym występuje pole elektrostatyczne wytworzone w sposób dowolny (np. przez jedno naładowane ciało, lub przez wiele ciał, względnie przez ładunek rozłożony w przestrzeni). Niech ładunek, będący źródłem pola elektrycznego nie ulega zmianie w czasie; ładunek kulki będzie tak mały, aby jego obecność nie zakłócała istotnie pola elektrycznego. Jeżeli kulka porusza się po dowolnej drodze zamkniętej, to doświadczenie wskazuje, że gdy powraca ona do punktu wyjściowego, wówczas nie wykonują żadnej pracy, ani też nie potrzebuje żadnej pracy do wykonania tego ruchu. Powyższy wynik zgodny jest z zasadą zachowania energii. Praca wykonana przez pole (gdy kulka oddala się od wybranego punktu) oraz praca wykonana przeciw siłom pola (gdy kulka zbliża się do tego samego punktu) jest całką poszczególnych energii wzdłuż zamkniętej drogi.

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (193)$$

względnie korzystając z równania (191)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (194)$$

Równanie to jest słuszne wzdłuż każdej dowolnej zamkniętej drogi całkowania.

Doświadczenie III. Mierzmy natężenie pola elektrycznego (za pomocą kulki próbnej) w każdym punkcie zamkniętej pustej przestrzeni – Rys.64. Podzielmy rozpatrywaną powierzchnię zamkniętą na bardzo dużą ilość bardzo małych poletek, przy czym każde poletko ma powierzchnię ds .

Jeśli składowa normalna natężenia pola elektrycznego ma kierunek na zewnątrz rozważanej powierzchni, to przyjmijmy ją za dodatnią, jeśli do wewnątrz – ujemną. Pomnożmy wszystkie składowe normalne przez odpowiadające im powierzchnie i rezultaty dodajmy. Doświadczenie to przeprowadzone dla każdej dowolnej zamkniętej powierzchni całkowania prowadzi do rezultatu

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \text{ (w próżni)}$$

gdzie ϵ_0 jest stałą zwaną przenikalnością elektryczną próżni.

$$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{C}{V \cdot m}$$

gdzie Q jest ilością elektryczności wewnątrz powierzchni i rozkład ładunku może być punktowy, liniowy, powierzchniowy lub przestrzenny.

Doświadczenie IV. Mierzmy natężenie pola elektrostatycznego w punktach leżących na dowolnej powierzchni, przy czym kulka próbna jest zanurzona w różnych substancjach. Wprowadźmy do równania (194) współczynnik ε_r charakteryzujący środowisko, w którym przeprowadza się doświadczenie. Współczynnik ten nazywany względną przenikalnością elektryczną (względną stałą dielektryczną). Informuje on, ile razy siły elektrostatyczne w danym środowisku są mniejsze niż w próżni. Wartość ε_r niektórych substancji (dielektryków) zawiera Tablica.3. Wartość ta zależy głównie od rodzaju substancji, zmienia się nieznacznie ze zmianą temperatury i innych warunków fizycznych. Równanie (194) uwzględniające fakt, że pomiary wykonujemy na powierzchniach przechodzących przez różne substancje (ε_r zmienia się przy przejściu od jednego materiału do drugiego) przedstawia wzór

$$\oint \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q,$$

względnie

$$\oint \varepsilon \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q,$$

gdzie

$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \quad (195)$$

lub

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q, \quad (196)$$

przy czym

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (197)$$

definiuje wektor indukcji elektrycznej.

Równanie (196) czytamy: strumień elektryczny (elektrostatyczny) przechodzący przez zamkniętą powierzchnię równa się ładunkowi elektrycznemu zawartemu wewnątrz tej powierzchni.

Oprócz zależności (195), własności elektromagnetyczne rzeczywistych ośrodków opisujemy zależnościami (198) oraz (199);

$$\mu = \mu_r \mu_0, \quad (198)$$

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad (199)$$

gdzie: μ_r jest względną przenikalnością magnetyczną danego ośrodka,
 μ_0 jest przenikalnością magnetyczną próżni,
 γ jest przenikalnością właściwą i wiąże gęstość prądu przewodzenia \vec{j} z natężeniem pola elektrycznego \vec{E} w danym punkcie.

Ośrodek nazywamy jednorodnym (niejednorodnym) jeżeli wartości ε , μ , γ w danym obszarze nie zależą (zależą) od współrzędnych punktu. Jeżeli zależności między

wielkościami: \vec{D} i \vec{E} (wzór 197) \vec{B} i \vec{H} (wzór 230) oraz \vec{j} i \vec{E} (wzór 199) są liniowe, to taki ośrodek nazywa się liniowym. W rzeczywistości wartości ϵ , μ i γ zależą od wartości przyłożonych pól, jednakże w praktyce zjawiska nieliniowe uwzględnia się tylko w przypadku bardzo dużych wartości przyłożonych pól. Jeżeli pary wektorów \vec{D} i \vec{E} , \vec{B} i \vec{H} oraz \vec{j} i \vec{E} są do siebie równoległe, to takie ośrodki nazywamy izotropowymi.

Ośrodki mogą wykazywać zjawisko histerezy (są to zjawiska polegające na niecałkowitej odwracalności procesów zachodzących w materii), zależność ich parametrów od częstotliwości (zjawisko dyspersji). Własności niektórych ośrodków zależą również od temperatury (nadprzewodnictwo).

Równania (191), (193) i (197) wyrażają podstawowe prawa elektrostatyki (dział fizyki zajmujący się wzajemnymi oddziaływaniami spoczywających ładunków). Rozwiązanie tych równań (nie zawsze jest to proste) umożliwia określenie każdego pola elektrostatycznego.

Przykładowo wartość natężenia pola elektrostatycznego \vec{E} jest stała we wszystkich punktach powierzchni kuli dla ośrodka o stałej dielektryczności $\epsilon_0\epsilon_r$ wynosi

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad (200)$$

Siła \vec{F} oddziaływania elektrostatycznego dwóch punktowych ładunków elektrostatycznych Q_1 i Q_2 znajdujących się w próżni, jest wprost proporcjonalna do iloczynu wartości tych ładunków i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości r między nimi (prawo Coulomba).

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad (201)$$

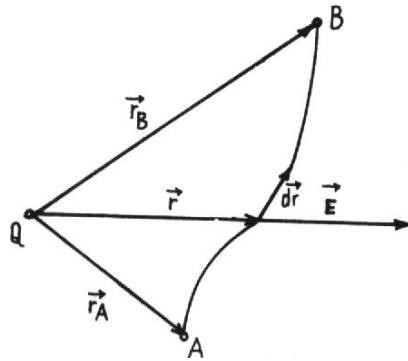
a potencjał
$$\varphi = -\int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (202)$$

Jednostką natężenia i indukcji elektrycznej kulomb na metr kwadratowy.

$$[D] = \left[\frac{C}{m^2} \right].$$

7.4. Napięcie elektryczne

Obliczmy potencjały φ_A oraz φ_B w punktach A i B pola wytworzonego przez ładunek Q - Rys.69.



Rys.69. Napięcie jest całką z natężenia między danymi punktami.

Korzystając z zależności (202) mamy

$$\varphi_A = \int_{r_A}^{\infty} \vec{E} \cdot \vec{dr} \quad , \quad \varphi_B = \int_{r_B}^{\infty} \vec{E} \cdot \vec{dr}$$

Różnicę potencjałów

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot \vec{dr}$$

nazywamy napięciem elektrycznym między punktami A i B i wyrażamy w woltach. Zauważmy, że

$$U_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot \vec{dr} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (203)$$

napięcie między danymi punktami nie zależy od drogi całkowania a jest jedynie funkcją współrzędnych punktów, między którymi wyznaczamy napięcie.

Obliczmy pracę dW wykonaną przez pole przy przemieszczeniu ładunku próbnego q

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dr} = q\vec{E} \cdot \vec{dr} = -qd\varphi. \quad (204)$$

Gdy przesunięcie jest skończone między punktami A i B to

$$W_{AB} = q \int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot \vec{dr} = qU_{AB} = q(\varphi_A - \varphi_B). \quad (205)$$

Jeżeli punkt B umieścimy w nieskończoności, to z uwagi na przyjętą umowę, że potencjał w nieskończoności jest równy zero, mamy

$$\varphi_A = \frac{W_{A\infty}}{q} \quad (206)$$

czyli potencjał φ_A jest związany z pracą przesunięcia ładunku od punktu A do nieskończoności.

Wartość pracy zależy tylko od wartości potencjału na początku i na końcu toru, a nie zależy od jego kształtu. Taką własność jak wiemy mają pola zachowawcze. Jeżeli tor jest krzywą zamkniętą, to praca wykonana przez pole elektrostatyczne przy przesuwanie ładunków po obwodzie zamkniętym wynosi zero.

Przemieszczenie ładunku przez siły pola zachodzi na koszt energii pola, Jeżeli pole wykonuje pracę dodatnią to jego energia zmniejsza się, jeżeli pracę wykonają siły zewnętrzne przeciw sił pola, to praca sił pola jest ujemna i jego energia wzrasta.

Ładunek znajdujący się w polu posiada energię potencjalną, którą obliczamy z zależności

$$dW = -dE_p$$

Po obustronnym scałkowaniu

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot \vec{dr} = E_p(A) - E_p(B). \quad (207)$$

Energia potencjalna ładunku próbnego jest więc równa iloczynowi ładunku i potencjału w danym punkcie pola, lub

$$E_p(A) = W_{A\infty}$$

czyli energia potencjalna jest równa pracy przesunięcia ładunku z danego punktu do nieskończoności.

7.5. Pojemność elektryczna

Jeżeli odizolowanemu przewodnikowi dostarczać będziemy stopniowo ładunków elektrycznych, wówczas jego potencjał będzie wzrastał. Ładunki te, rozmieszczając się będą na powierzchni przewodnika w ten sposób, że w każdym punkcie przewodnika potencjał będzie jednakowy, a natężenie pola wewnątrz przewodnika było równe zero. Oznacza to, że związek między ładunkiem Q zgromadzonym na przewodniku a potencjałem U tego przewodnika zależy wyłącznie od kształtu i rozmiarów przewodnika.

Jeżeli kształt i rozmiary przewodnika nie ulegają zmianie, wówczas stosunek

$$C = \frac{Q}{U} \quad (207)$$

jest dla danego przewodnika stały.

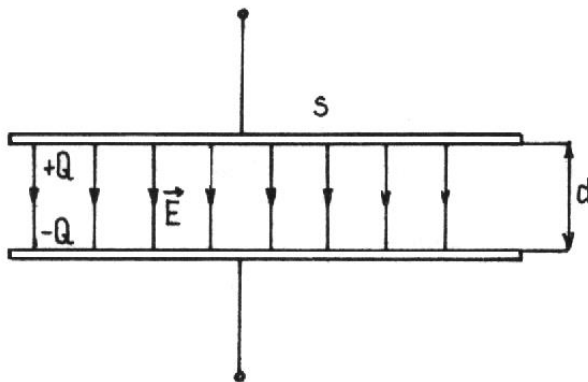
Wyrażenie (207) nazywamy pojemnością elektryczną przewodnika.

Jeżeli w pobliżu naładowanego przewodnika znajdują się inne przewodniki, wówczas indukowane w tych przewodnikach ładunki przeciwnego znaku wytworzą własne, przeciwnie skierowane pole elektryczne, które osłabi pole naładowanego przewodnika.

Oczywiście ładunek zgromadzony na przewodniku nie ulegnie zmianie, natomiast zmniejszy się jego potencjał, więc pojemność tego przewodnika zwiększy się w porównaniu z

przewodnikiem odizolowanym. Pojemność układu przewodników jest zależna od ich rozmiarów i rozmieszczenia względem siebie.

Układ dwóch przewodników znajdujących się w niewielkiej odległości d od siebie nazywamy kondensatorem (kondensatorem płaskim) - Rys.70.



Rys.31. Kondensator płaski. Przestrzeń między okładkami kondensatora może być pusta lub wypełniona dielektrykiem. W przestrzeni tej skupione jest pole elektryczne.

Przyjmijmy, że pole elektryczne w kondensatorze jest jednorodne. Ładunek Q zgromadzony na jednej okładce obliczamy zależnością

$$Q = \sigma \cdot S = \varepsilon ES \quad (208)$$

gdzie σ oznacza gęstość powierzchniową ładunku, a napięcie między okładkami kondensatora wynosi

$$E = U \cdot d .$$

Stąd pojemność płaskiego kondensatora wynosi

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon \frac{S}{d} \quad (209)$$

Wprowadzając dielektryk o względnej przenikalności $\varepsilon_r > 1$ między okładki kondensatora, zwiększamy pojemność ε_r razy.

Przykładowe wartości względnej przenikalności elektrycznej ε_r dla niektórych dielektryków wynoszą: próżnia $\varepsilon_r = 1$, powietrze $\varepsilon_r = 1.0006$, szkło $\varepsilon_r = 5 - 6$, woda $\varepsilon_r = 81$.

Jednostką pojemności elektrycznej w układzie SI jest 1 farad

$$[1F] = \left[\frac{1C}{1V} \right]$$

Jednostka ta do celów praktycznych jest zbyt duża, stosujemy więc podwielokrotności tej jednostki

$$1\mu F = 10^{-6} F$$

$$1pF = 10^{-12} F$$

Pojemność kondensatora można regulować np. przesuając równolegle jedną okładkę kondensatora względem drugiej (tzw. kondensatory zmienne) albo łącząc je równolegle względnie szeregowo. Wypadkowa pojemności układu kondensatorów połączonych równolegle wynosi ($U=\text{const}$)

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1}{U} + \frac{Q_2}{U} \dots + \frac{Q_n}{U} = C_1 + C_2 \dots + C_n \quad (210)$$

a połączonych szeregowo ($Q=\text{const}$)

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (211)$$

7.6. Energia pola elektrostatycznego

W polu elektrycznym wytworzonym przez ładunki elektryczne są pewne ilości energii. Wyobraźmy sobie, że do izolowanego i nienaładowanego przewodnika o pojemności C dostarczamy z bardzo dużej odległości ładunek dQ . Zakładamy dalej, że w nieskończoności nie ma pola elektrycznego (potencjał jest równy zero), ładowanie przewodnika odbywa się bardzo powoli (nie uwzględnia się pól magnetycznych powstających przy przesuwanie ładunku) oraz, że ładunek i potencjał przewodnika związane są zależnością liniową. Potencjał tego przewodnika wyniesie

$$d\varphi = \frac{dQ}{C} \quad (212)$$

a praca elementarna

$$dW = \varphi dQ \quad (213)$$

Niech potencjał przewodnika wzrasta od 0 do wartości U , więc szukana praca na podstawie związków (212) i (213) wyniesie

$$W = C \int_0^U \varphi d\varphi = \frac{1}{2} CU^2 \quad (214)$$

praca ta jest równa energii naładowanego przewodnika o potencjale U i ładunku Q . Gdy przewodnik będzie rozładowany przez opornik, to ta energia zmienia się całkowicie na ciepło.

Napięcie U między okładkami kondensatora płaskiego wyraża się zależnością

$$U = Ed ,$$

stąd energię pola elektrycznego można zapisać wzorem

$$W = \frac{1}{2} UDS = \frac{1}{2} EDSd,$$

gdzie Sd jest objętością V rozpatrywanego jednorodnego pola.

Jednostką energii pola elektrycznego w układzie SI jest 1 J (dżul).

7.7. Zasada superpozycji

Jeżeli w rozpatrywanym obszarze znajdują się różne ładunki, to pole elektryczne w danym punkcie jest sumą pól poszczególnych ładunków. Zasada ta odnosząca się do dowolnej liczby ładunków nosi nazwę zasady superpozycji pól. Zasada superpozycji, prawo Gausa oraz równanie pola (Laplace'a lub Poissona) to podstawowe narzędzia elektrostatyki.

W odniesieniu do wektora natężenia pola elektrycznego zasadę superpozycji formułujemy następująco: natężenie pola elektrycznego \vec{E} , wywołane w rozpatrywanym punkcie przestrzeni przez sumę ładunków, jest równe sumie geometrycznej poszczególnych natężeń pola wywołanych w tym punkcie przez każdy ładunek oddzielnie :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{r}_i^0 \quad (215)$$

Zasadę superpozycji w odniesieniu do potencjału skalarnego φ siły \vec{F} działającej na umieszczony w polu ładunek próbny q oraz energię ładunku próbnego w polu układu ładunków E_p wyrażają poniższe związki

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i} \\ \vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{r}_i^0 \end{aligned} \quad (216)$$

$$E_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i}$$

7.8. Prąd elektryczny

Ze względu na zdolność przewodzenia, ośrodki dzielimy na materiały przewodzące (pierwszego i drugiego rodzaju) i dielektryki (izolatory). Do materiałów przewodzących pierwszego rodzaju zaliczamy metale, w których pole elektryczne powoduje uporządkowany ruch elektronów swobodnych.

Dla materiałów przewodzących drugiego rodzaju zaliczamy elektrolity, w których pole elektryczne powoduje uporządkowany ruch jonów dodatnich i ujemnych powstałych na skutek dysocjacji. Przewodnikiem idealnym byłby ośrodek, dla którego $\gamma = \infty$, natomiast idealnym dielektrykiem byłby ośrodek, dla którego $\gamma = 0$. Poza próżnią ośrodki idealne w przyrodzie nie istnieją, ale do dielektryków idealnych zbliża się powietrze $\gamma \approx 10^{-30} S/m$ -- czytamy simensów na metr), a do przewodników idealnych – metale ($\gamma \approx 10^7 S/m$).

Pozostałe ośrodki nazywamy quasi—przewodnikami lub guasi – dielektrykami w zależności od tego, które cechy przeważają. W niektórych podręcznikach, ośrodki dielektryczne o małej przewodności właściwej γ określane są mianem półprzewodników. Właściwości elektryczne ośrodków zależą od czynników zewnętrznych, a przede wszystkim od temperatury.

Jeżeli wytworzymy między końcami przewodnika różnicę potencjałów, to wewnątrz niego pojawi się pole elektryczne o natężeniu

$$\vec{E} = -grad\varphi$$

wprawiające w ruch zawarte w przewodniku swobodne ładunki.

Natężenie prądu można obliczyć jako pochodne ładunku przepływającego przez dany przekrój względem czasu

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (217)$$

Jednostką natężenia prądu elektrycznego jest 1 A (amper).

$$[1A] = \left[\frac{1C}{1s} \right],$$

a jego wzorzec określany jest na podstawie sił oddziaływania między przewodnikami z prądem.

Przepływ prądu w przewodniku jest wywołany działaniem pola elektrycznego na nośniku ładunku znajduje się wewnątrz przewodnika. Doświadczalnie stwierdzono, że natężenie prądu płynącego przez przewodnik jest proporcjonalne do napięcia U przyłożonego do jego końców:

$$I = \frac{1}{R}U \quad (218)$$

Prawo to nosi nazwę prawa Ohma. Wielkość $\frac{1}{R}$ nazywamy przewodnością, a jej odwrotność R oporem (rezystancją). Jednostką oporu jest 1Ω (om)

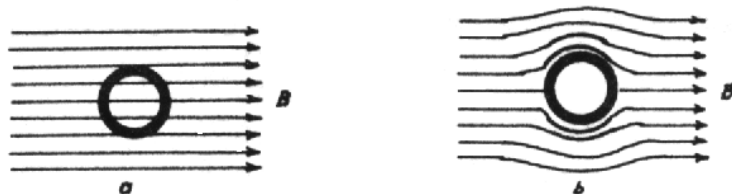
$$[1\Omega] = \left[\frac{1V}{1A} \right].$$

Prawo Ohma jest spełnione dla różnorodnych materiałów z dużą dokładnością. Układy do których nie stosuje się prawo Ohma to układy w których występuje półprzewodnikowe elementy, diody próżniowe oraz układy zawierające, jako element przewodzący, elektrolity.

Pewne materiały w pobliżu 0^0K wykazują gwałtowny zanik oporu właściwego. Zjawisko to wykryte dla rtęci przez K.Onnesa w 1908r. nazwano nadprzewodnictwem, a temperatury, w których zachodzi to zjawisko nazwano temperaturami krytycznymi T_c (temperaturami przejścia). Obecnie znamy ponad 100 nadprzewodników i ponad 1000 związków posiadających właściwości nadprzewodnictwa pod ciśnieniem normalnym. Pod dostatecznie dużym ciśnieniem własność nadprzewodnictwa wykazuje większość metali.

W temperaturze przejścia własność przewodników zmienia się skokowo: dla prądu stałego opór przewodnika maleje do zera, gwałtownie rośnie ciepło właściwe, po czym poniżej

temperatury przejścia ciepło właściwe ponownie maleje, maleje do zera siła termoelektryczna. Metale, które w temperaturze pokojowej są najlepszymi przewodnikami Cu, Pt, Ag, Fe, nie wykazują nadprzewodnictwa nawet w najniższych temperaturach i pod największym



ciśnieniem. Ogólnie nadprzewodnikami są metale będące ferromagnetykami względnie antyferromagnetykami. W polu magnetycznym nadprzewodniki wykazują tak zwany efekt Meisnera polegający na „wypychaniu” linii sił indukcji magnetycznej na zewnątrz przewodnika – Rys.71.

Rys.71. Efekt Meisnesra dla nieferromagnetyka

- a) dla stanu „normalnego”
- b) dla stanu nadprzewodzącego.

Prawa Ohma, przy warunku, że przewodnik jest długim walcem o przekroju $S = \text{const}$ i długości l sprowadza się do równania (punkty A i B znajdują się na końcach przewodnika)

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}}{\int \vec{j} \cdot d\vec{S}} = \rho \frac{l}{S} \quad (219)$$

Wielkość ρ nosi nazwę oporu właściwego i charakteryzuje materiał przewodnika pod względem elektrycznym.

Jednostką oporu właściwego jest $\Omega \cdot \text{m}$.

Wielkość $\gamma = \frac{1}{\rho}$ występująca w powyższym wzorze nosi nazwę przewodności właściwej.

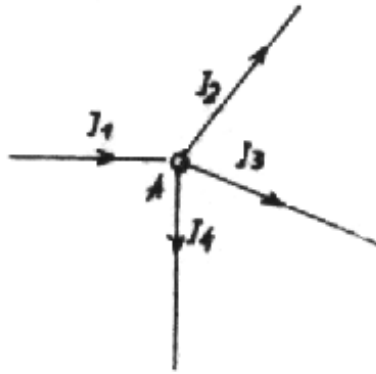
Jednostką przewodności właściwej jest $1 \text{ S} / \text{m}$ (simens na metr).

Założmy, że mierząc natężenie prądu płynącego przez przewodnik metalowy oraz różnicę napięć między jego końcami stwierdzamy, że pole elektryczne nie ulega zmianom. Oznacza to, że ładunek znajdujący się na powierzchni przewodnika, pozostaje niezmienny w czasie przepływu prądu, względnie nie występują zmiany gęstości ładunku.

Szczególnym przypadkiem tego faktu jest pierwsze prawo Kirchhoffa: w węźle ładunki nie mogą ani gromadzić się ani znikać.

Ilość ładunku wpływającego musi się równać ilości ładunku wypływającego.

Prądom dopływającym do węzła przypisujemy znak dodatni, prądom odpływającym od węzła, przypisujemy znak ujemny – Rys.72.



Rys.72. Ilustracja prawa węzłów: $I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0$.

7.9. Prawo Joule'a – Lenza

Podczas przepływu prądu przez przewodnik, nośniki prądu muszą pokonywać opory ruchu. Efektem tego zjawiska jest wydzielanie się ciepła. Wydzielone ciepło nosi nazwę ciepła Joule'a. Aby znaleźć jego wartość, zróżniczkujemy względem czasu wyrażenia na pracę przeniesienia ładunku Q między dwoma punktami o różnicy potencjałów U

$$W = QU$$

$$p = \frac{dW}{dt} = \frac{dQ}{dt}U + Q \frac{dU}{dt} \quad (220)$$

Jeżeli $U = \text{const}$, to moc wydzielająca się w postaci ciepła na oporniku R wynosi

$$P = I \cdot U = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad (221)$$

gdzie $I = \frac{dQ}{dt}$

Ciepło wydzielone w czasie t obliczamy zależnością

$$W = P \cdot t = U \cdot I \cdot t = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t \quad (223)$$

i wyrażamy w dżulach.

Wyprowadzenie prawa Ohma w postaci ogólnej wymaga wprowadzenia pojęcia siły elektromotorycznej.

Źródłem siły elektromotorycznej (SEM) są urządzenia wytwarzające różnicę potencjałów pomiędzy dwoma punktami. Są to prądnice, akumulatory, baterie. Siłę elektromotoryczną „ ϵ ” źródła definiujemy następująco

$$\epsilon = \frac{dW}{dQ} \quad (224)$$

Jednostką siły elektromotorycznej jest wolt (1 V).

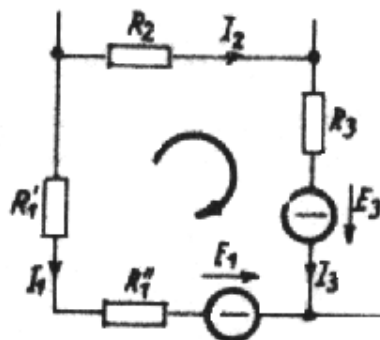
Siła elektromotoryczna wytwarza w przewodniku dodatkowe pole o natężeniu \vec{E}_m podtrzymujące ruch ładunków. Gdyby nie było siły elektromotorycznej, wówczas natężenie prądu w zamkniętej przewodzącej pętli o niezerowym oporze byłoby równe zero. Wzór (225) nosi nazwę uogólnionego prawa Ohma.

$$\mathcal{E} = IR. \quad (225)$$

R oznacza tu całkowity opór obwodu zawierającego źródło siły elektromotorycznej. Jeżeli np. w takim obwodzie np. oczku sieci elektromotorycznej – Rys.73. mamy „n” źródeł sił elektromotorycznych i „K” oporników, przy czym wszystkie te elementy połączone są szeregowo, to prawo Ohma przechodzi w tzw. drugie prawo Kirchhoffa

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i = \sum_{i=1}^k I_i \cdot R_i \quad (226)$$

Prawo obwodów (drugie prawo Kirchhoffa) głosi, że w obwodzie zamkniętym, wybranym dowolnie w rozgałęzionej sieci elektrycznej, suma algebraiczna spadków napięć (iloczynów natężeń I_i i oporności R_i) na odpowiednich odcinkach tego obwodu równa się sumie algebraicznej występujących w nich sił elektromotorycznych E_i .



Rys.73. Ilustracja prawa obwodów: $-E_1 + E_3 = -(R_1 + R_1')I_1 + R_2I_2 + R_3I_3$.

Powyższe twierdzenie jest oczywiście konsekwencją zasady zachowania energii dla prądów elektrycznych.

Stosując drugie prawo Kirchhoffa, wybiera się określony kierunek obiegu sumowania. Prądy I_i , których kierunek jest zgodny z kierunkiem obiegu sumowania, przyjmuje się za dodatnie. Siłę elektromotoryczną \mathcal{E}_i źródeł prądu uważa się za dodatnią wówczas, gdy wytwarzają one prądy, których kierunek jest zgodny z kierunkiem obiegu sumowania.

Jeżeli obwód zawiera tylko jedno ogniwo wówczas wzór (226) redukuje się do wyrażenia

$$\mathcal{E} = I(R_z + R_w). \quad (179)$$

W powyższym wzorze R_w jest oporem wewnętrznym ogniwa a R_z oporem zewnętrznym przewodników.

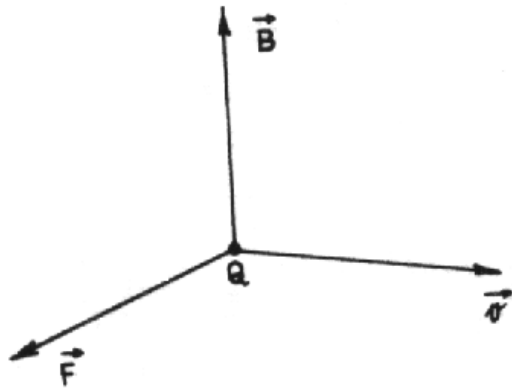
7.10. Magnetostatyka. Pole magnetyczne

Doświadczenia wskazują, że prąd płynący w przewodzie jest przyczyną występowania sił mechanicznych działających na ten przewód. Siły te występują również, gdy przewód z prądem znajduje się w pobliżu innego przewodu z prądem lub w sąsiedztwie magnesu. Siły te znikają, gdy przepływ prądu ustaje. Przestrzeń, w której występuje działanie powyższych sił nazywamy polem magnetycznym. Występowanie tych sił związane jest z ruchem ładunków. Ruchome ładunki spotykamy zarówno w przewodnikach z prądem jak i magnesach trwałych i w ogóle we wszystkich materiałach magnetycznych w postaci prądów atomowych.

Doświadczalnie można stwierdzić, że jeżeli ładunek próbny Q porusza się w przestrzeni z prędkością \vec{v} , to siła \vec{F} działająca na ten ładunek jest równa

$$\vec{F} = Q(\vec{v} \cdot \vec{B}).$$

Zwrot siły określa reguła śruby prawoskrętnej – Rys.74.



Rys.74. Zwrot siły $\vec{F} = Q(\vec{v} \cdot \vec{B})$ określa reguła śruby prawoskrętnej.

Wielkość \vec{B} nosi nazwę indukcji magnetycznej. Jest ona wektorem o kierunku pola. Jeżeli ładunki poruszają się prostopadłe do pola, to siła

$$F = Q v B$$

i stąd

$$B = \frac{F}{Qv}$$

Jednostką indukcji magnetycznej jest 1T [tesla]

$$1[T] = 1\left[\frac{N \cdot S}{C \cdot m}\right] = 1\left[\frac{V \cdot S}{m^2}\right]$$

Inną spotykaną w literaturze jednostką indukcji magnetycznej nie należącej do układu SI jest 1 gaus [1 Gs]

$$1T = 10^4Gs$$

Zauważmy, że przedstawiona definicja pola magnetycznego oparta jest o pojęcie ruchomych ładunków jest przyczyną, że pojęcie pola jest względne. Jest to spowodowane tym,

że pojęcie ruchu związane jest z układem odniesienia. Jeżeli w pewnym układzie ładunek spoczywa, to obserwatorzy w tym układzie nie stwierdzą istnienia pola magnetycznego, a obserwowanym siłom przypiszą niemagnetyczne przyczyny.

Linie indukcji magnetycznej mające zwrot wektora \vec{B} przechodzącego przez daną powierzchnię S nazywamy strumieniem magnetycznym Φ_m . Gdy powierzchnia S jest prostopadła do jednorodnego pola indukcji magnetycznej \vec{B} , to strumień definiujemy zależnością

$$\Phi_m = B \cdot S \quad (228)$$

a dla pola niejednorodnego

$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (229)$$

Jednostką strumienia magnetycznego jest weber (Wb)

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 = 1 \text{ V} \cdot \text{s}$$

Polu magnetycznemu przypisujemy natężenie pola magnetycznego, którego wektor \vec{H} związany jest z wektorem indukcji magnetycznej \vec{B} zależnością

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (230)$$

gdzie wielkość $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$ oznacza przenikalność magnetyczną ośrodka.

Wielkość μ_0 nazywamy przenikalnością magnetyczną próżni. Wynosi ona:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{A}^{-1} \text{ m}^{-1}.$$

Wielkość μ_r nazywamy względną przenikalnością magnetyczną danego ośrodka.

Pod względem magnetycznym wszystkie ciała dzielimy na trzy grupy :

- ciała dla których przenikalność magnetyczna μ_r jest nieco mniejsza od jedności (przykładowo dla bizmutu $\mu_r = 0,99824$) nazywamy diamagnetykami.

Ciała diamagnetyczne są wypychane z niejednorodnego pola magnetycznego w kierunku najmniejszego natężenia pola magnetycznego i ustawiają się one prostopadle do linii sił pola magnetycznego.

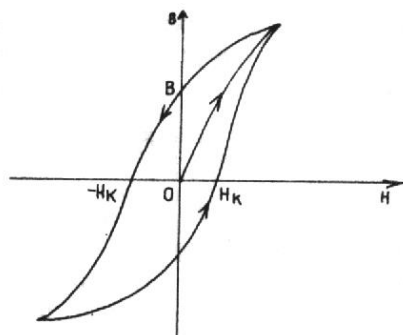
- ciała, dla których przenikalność magnetyczna μ_r jest nieco większa od jedności, nazywamy paramagnetykami. Przykładowo dla chromu $\mu_r = 1,000315$.

W niejednorodnym polu magnetycznym ciała paramagnetyczne są wciągane do miejsc o dużym natężeniu i ustawiają się wzdłuż kierunku pola magnetycznego.

- ciała, które mają wysokie dodatnie wartości μ_r osiągające nawet wartości kilkudziesięciu tysięcy nazywamy ferromagnetykami. Wartość μ_r dla ferromagnetyków nie jest wielkością stałą, zależy ona od natężenia pola oraz temperatury.

Do ferromagnetyków zaliczamy żelazo, nikiel, kobalt, gadolin, dysproz oraz stopy tych i innych metali. Jeśli temperatura wzrośnie powyżej krytycznej temperatury, zwanej temperaturą Curie, to ferromagnetyk staje się paramagnetykiem, gdy temperatura opadnie poniżej temperatury Curie, ferromagnetyzm pojawia się ponownie.

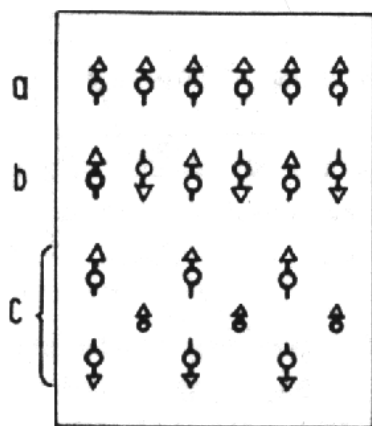
Dla ciał ferromagnetycznych obserwuje się zjawisko histerezy magnetycznej. Przebieg tego zjawiska przedstawiono na Rys.75.



Rys.75. Krzywa histerezy magnetycznej dla ciał ferromagnetycznych. OB oznacza pozostałość magnetyczną, OH_k oznacza koercję. Dla ferromagnetyków miękkih koercja jest wielkością małą.

Z wykresu odczytujemy, że krzywa namagnesowania nie przebiega po tej samej linii co krzywa rozmagnesowania. Jeżeli próbkę, która nie była namagnesowana, namagnesujemy wytwarzając pole H (na próbce nawinięta jest cewka, przez którą przepuszczamy prąd o zmieniającym się natężeniu i kierunku), a następnie zmniejszamy natężenie pola przez wartość zerową do $-H_k$, następnie podniesiemy natężenie przez wartość zerową do H wówczas otrzymujemy krzywą zamkniętą zwaną pętlą histerezy. Materiały, które można łatwo rozmagnesować mają małą koercję (żelazo), materiały, które trudno rozmagnesować (stal) mają dużą koercję. Z nich właśnie wykonywane są trwałe magnesy.

Dwoma innymi rodzajami magnetyzmu, ściśle związanymi z ferromagnetyzmem są: antyferromagnetyzm i ferrimagnetyzm. Materiały antyferromagnetyczne mają bardzo mały magnetyzm zewnętrzny. Jeżeli podwyższy się temperaturę tych materiałów (powyżej temperatury Néela), materiał staje się paramagnetykiem. Przykładem ferrimagnetyka jest ferryt żelaza. Występują tutaj dwa różne rodzaje jonów magnetycznych: Fe^{+++} oraz Fe^{++} . Materiały ferrimagnetyczne wykazują magnetyczne efekty zewnętrzne pośrednie między ferromagnetykami i antyferromagnetykami. Ferrimagnetyzm znika, gdy materiał zostanie podgrzany powyżej pewnej temperatury. Ustawienie elementarnych dipoli magnetycznych w ferromagnetyku, antyferromagnetyku i ferrimagnetyku przedstawiono na Rys.76.



Rys.45. Ustawienie elementarnych dipoli magnetycznych w ferromagnetyku (a), antyferromagnetyku (b), i ferrimagnetyku (c).

7.11. Doświadczenie z polem magnetycznym

Doświadczenie V. Mierzmy siłę magnetyczną wywieraną na krótki, prosty odcinek przewodu, przez który przepływa prąd elektryczny. Stwierdzamy, że jest ona prostopadła do przewodu. Wartość siły \vec{F} jest proporcjonalna do natężenia I prądu płynącego w przewodzie oraz do długości przewodu l . Doświadczenie wskazuje również, że przewód próbny można ustawić w taki sposób, aby nie działała na niego żadna siła magnetyczna. Odchylenie przewodu od takiego „zerowego” położenia powoduje pojawienie się siły magnetycznej proporcjonalnej do sinusa kąta α zawartego między kierunkiem przewodu próbnego a kierunkiem, dla którego siła jest równa zero.

Obliczmy siłę \vec{F} działającą na elektrony przewodnictwa znajdującego się w elemencie dl (przez który płynie prąd o natężeniu I) umieszczonego w polu magnetycznym o indukcji \vec{B} . Całkowitą siłą działającą na przewodnik o długości l wynosi

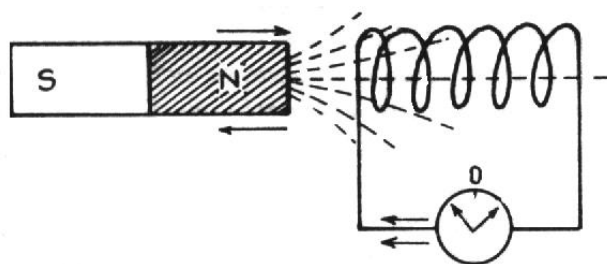
$$\vec{F} = I \int d\vec{l} \times \vec{B} \quad (231)$$

lub, gdy pole jest jednorodne i w przypadku przewodnika prostoliniowego

$$\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B}) \quad (232)$$

Równanie (231) lub (232) nosi nazwę prawa Laplace’a, a siłę \vec{F} działającą na przewodnik z prądem w polu magnetycznym nazywamy siłą Ampere’a.

Doświadczenie VI. Doświadczenie to bada zależność między polami magnetycznymi i elektrycznymi. W tym doświadczeniu mierzymy galwanometrem balistycznym ładunek przepływający przez zwojnicę znajdującą się w polu magnetycznym o zmiennym natężeniu. Wiele doświadczeń wykazuje – Rys.77, że w czasie ruchu magnesu względem zwojnicy powstaje w niej prąd. Prąd ten nazywamy prądem indukcyjnym i wywołany jest siłą elektromotoryczną indukcji.



Rys.77. Zmiana strumienia magnetycznego spowodowana np. względną zmianą położenia magnesu względem zwojnicy powoduje, że w zwojnicy płynie prąd indukcyjny. Zmiana kierunku ruchu magnesu lub zwojnicy zmienia kierunek przepływu prądu.

Przyczyną wytwarzania napięcia między końcami pręta przesuwanego w polu magnetycznym jest siła Lorentza działająca na swobodne elektrony

$$\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (233)$$

Pod wpływem siły Lorentza elektrony płyną wzdłuż pręta i w ten sposób jeden z końców ładuje się ujemnie a drugi dodatnio. Przepływ elektronów trwa dopóty, dopóki wytworzone pole elektryczne o wielkości \vec{QE} nie zahamuje go

$$\vec{QE} = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (234)$$

Natężenie pola w pręcie ma więc wartość $\vec{E} = (\vec{v} \times \vec{B})$ i ma kierunek osi pręta.

Napięcie między końcami pręta jest równe

$$U = -\int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\varepsilon \quad (235)$$

gdzie ε jest siłą elektromotoryczną indukcji (znak minus związany jest z regułą Lenza). Wyrażenie (189) przekształcić można następująco

$$\varepsilon = -\int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -\int_l \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times \frac{d\vec{r}}{dt}) = -\int_l \vec{B} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (236)$$

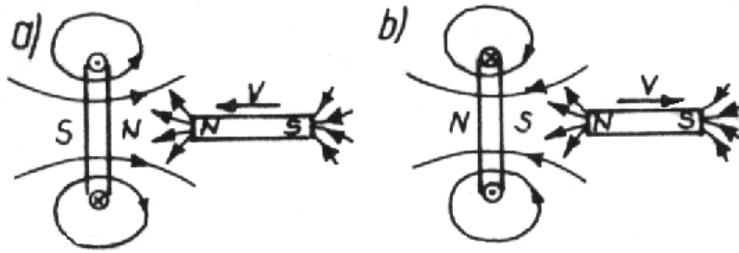
Otrzymane wyrażenie odnoszące się do przewodników dowolnego kształtu wyraża prawo Faraday'a: indukowana w obwodzie siła elektromotoryczna indukcji ε jest równa co do wartości bezwzględnej, a przeciwna co do znaku prędkości zmiany strumienia magnetycznego Φ_m przenikającego przez powierzchnię ograniczoną tym obwodem.

Jeżeli zamiast pręta weźmiemy cewkę, siła elektromotoryczna będzie proporcjonalna do liczby zwojów

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (237)$$

Istnieje wiele sposobów zmiany wartości strumienia magnetycznego. Możemy np. zmienić wartość indukcji B poprzez ruch magnesu lub zwojnicy, zmienić kąt między B a płaszczyzną zwojnicy lub zmienić powierzchnię obwodu dokonując jego odkształcenia.

Kierunek indukowanej siły elektromotorycznej można wywnioskować z zasady zachowania energii. Gdyby w zwoju – Rys.78. przy zbliżaniu do niego bieguna N magnesu płynął prąd w kierunku przeciwnym, niż zaznaczono to na Rys.78. (a) i (b), wówczas pojawiłby się po jego stronie zwróconej ku magnesowi biegun S, przyciągający magnes do zwoju. Można byłoby spowodować samorzutny ruch magnesu. Magnes przyspieszałby ruch ku zwojowi, zwiększając stale swoją energię kinetyczną. W zwoju wydzielano by się ciepło Joule'a z coraz większą prędkością. Przeczy to zasadzie zachowania energii. Kierunek indukowanej siły elektromotorycznej jest więc taki, że wytworzone przez ten prąd własne pole magnetyczne przeciwdziała zmianie strumienia magnetycznego, która go wywołuje. Stwierdzenie powyższe stanowi regułę Lenza i objawia się właśnie znakiem „minus” we wzorach (236) i (237).



Rys.78. Prąd indukowany w obwodzie ma taki kierunek, że wytwarzane przez ten prąd własne pole magnetyczne przeciwdziała zmianie strumienia magnetycznego, która go wywołuje.

Doświadczenie VII. Przy pomocy zwojnicy połączonej z galwanometrem mierzymy składową normalną wektora indukcji magnetycznej \vec{B} w różnych punktach zamkniętej powierzchni o dowolnych rozmiarach i kształtach.

Wynik doświadczenia jest następujący: suma natężeń pola magnetycznego po każdej zamkniętej powierzchni jest równa zero

$$\oint_s \vec{B} \cdot \vec{ds} = 0, \quad \text{czyli} \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad (238)$$

Równanie (238) oznacza, że pole magnetyczne jest polem bezźródłowym .

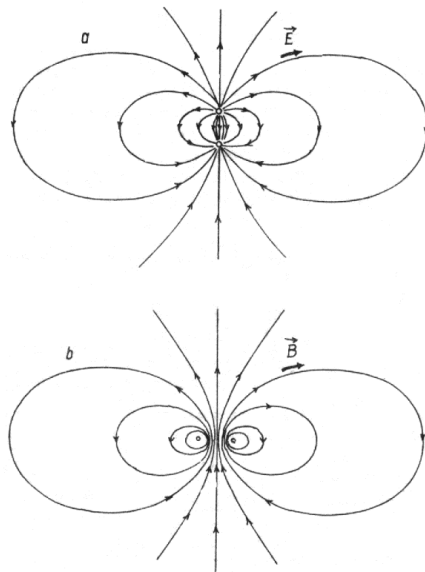
Oznacza to, że wektor \vec{B} może być przedstawiony jako rotacja innego wektora np. \vec{A}

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}. \quad (196)$$

Bezźródłowość pola magnetycznego oznacza, że linie wektora indukcji magnetycznej nie mają początku ani końca, że są one krzywymi zamkniętymi. Pole spełniające równość $\text{div} \vec{B} = 0$ nosi nazwę pola solenoidalnego.

Pole magnetyczne w pobliżu pętli z prądem (magnes sztabkowy i obwód z prądem uważamy za dipole magnetyczne) różni się całkowicie od pola elektrycznego dipola elektrycznego – Rys.79.

Pole elektryczne pomiędzy ładunkami jest skierowane w dół, podczas gdy pole magnetyczne wewnątrz pętli z prądem jest skierowane w górę. W dużych odległościach pola są takie same. Różnica to spowodowana jest tym, że wszędzie $\text{div} \vec{B} = 0$. Powyższe równanie interpretuje się również jako nieistnienie oddzielnych biegunów magnetycznych, tzw. monopoli magnetycznych.



Rys.79. Pole elektryczne dipola elektrycznego (a) i dipola magnetycznego (b) wytworzone przez prąd pierścieniowy.

Doświadczenie VIII. Doświadczenie to przeprowadzone z użyciem cewki i galwanometru, służy do pomiaru składowej stycznej gęstości strumienia magnetycznego wzdłuż pewnej zamkniętej drogi. Wynik doświadczenia w zależności od tego, czy droga całkowania przebiega przez ośrodek jednorodny (239) lub nie (240) jest następujący:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I \quad (239)$$

lub

$$\oint \frac{\vec{B} \cdot d\vec{l}}{\mu} = I \quad (240)$$

Równania powyższe są słuszne dla wszystkich zamkniętych dróg całkowania i noszą nazwę prawa Ampere'a.

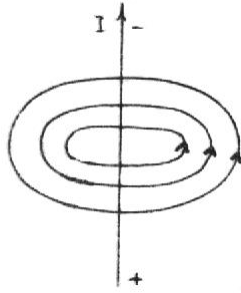
Wprowadzając np. do równania (240) wektor \vec{H} zwany wektorem natężenia pola magnetycznego

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (241)$$

mamy

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (242)$$

Powyższe równanie umożliwia obliczenie natężenia pola magnetycznego \vec{H} w odległości r od przewodnika, przez który płynie prąd o natężeniu I – Rys.50.



Rys.80. Zwrot linii sił pola magnetycznego dokoła przewodnika liniowego z prądem określa reguła korkociągu prawoskrętnego.

Gdy wektor \vec{B} ma stałą wartość bezwzględną B , a wektor \vec{dl} jest styczny do drogi całkowania i ma ten sam kierunek co wektor \vec{B} to (w próżni)

$$B \oint_c \vec{dl} = \mu_0 I,$$

ale

$$\oint_c \vec{dl} = 2\pi r,$$

więc

$$2\pi r \mu_0 H = \mu_0 I,$$

stąd

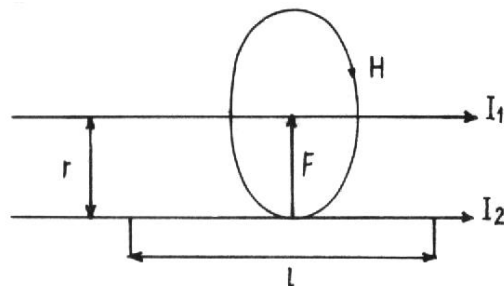
$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (243)$$

Jednostką natężenia magnetycznego jest $1 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$.

7.12. Amper absolutny

Weźmy długi przewodnik – Rys.50., przez który płynie prąd o natężeniu I_1 . W odległości r_1 od przewodnika natężenie \vec{H} pola magnetycznego ma wartość (243)

$$H = \frac{I_1}{2\pi r}.$$



Rys.50. Wzajemne oddziaływanie na siebie dwóch równoległych przewodników z prądem.

Jeżeli w odległości r od rozpatrywanego przewodnika znajduje się drugi, równoległy do pierwszego, przez który płynie prąd o natężeniu I_2 , to na odcinek o długości l drugiego przewodnika będzie działać siła

$$F = I_2 l B = I_2 l \mu_0 H = \frac{\mu_0 l I_1 I_2}{2\pi r} \quad (244)$$

skierowana ku pierwszemu przewodnikowi.

Zjawisko przyciągania się dwóch długich równoległych przewodników, w którym płyną prądy zgodnie skierowane, wykorzystano do zdefiniowania jednej z podstawowych jednostek układu SI – ampera. Jeśli podstawimy do wzoru (244)

$$l = 1\text{m} \cdot \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{VsA}^{-1}\text{m}^{-1} \text{ oraz } I_1 = I_2 = 1\text{A}$$

$$\text{to } F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

to znaczy wartość siły wymienionej w definicji ampera.

7.13. Indukcja własna i wzajemna

Rozpatrzmy obwód, przez który płynie prąd o natężeniu I . Z prawa Biota - Savarta wynika, że obwód ten (w danym punkcie) znajduje się w wytworzonym przez siebie polu magnetycznym o indukcji \vec{B}

Strumień magnetyczny Φ_m przenikający obwód o powierzchni S wynosi

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = L \cdot I \quad (245)$$

Wielkość L nazywamy indukcyjnością obwodu (współczynnikiem samoindukcji). Jednostką indukcyjności jest 1H (henr)

$$[1\text{H}] = \left[1 \frac{\text{Wb}}{\text{A}} \right] = \left[\frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}} \right]$$

Jeżeli w rozpatrywanym obwodzie następować będą zmiany natężenia prądu, to indukują one w tym obwodzie siłę elektromotoryczną indukcji własnej (samoindukcji)

Obliczamy ją z prawa Faraday'a.

$$\epsilon_{\text{wt}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI)$$

Gdy kształt i rozmiary obwodu nie będą zmieniać się ($L = \text{const}$), wówczas powyższy związek piszemy

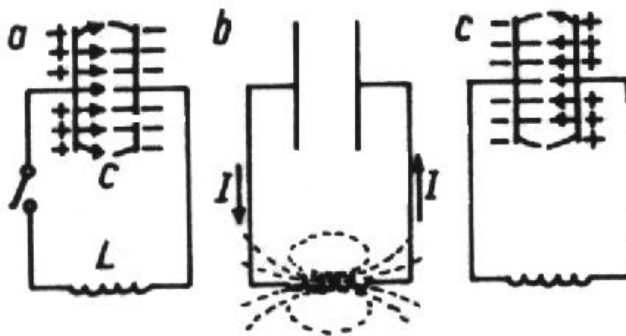
$$\epsilon_{\text{wt}} = -L \frac{dI}{dt} \quad (213)$$

i stanowi on treść prawa Faraday'a dla samoindukcji: siła elektromotoryczna indukcji własnej przeciwdziała zmianom natężenia prądu w obwodzie. W obwodzie o dużej indukcyjności, prąd

narasta lub maleje powoli nawet przy szybkim zamykaniu i otwieraniu obwodu (powstaje iskra).

7.14. Drganie i fale elektromagnetyczne

Jeżeli w obwodzie zachodzą okresowe przemiany energii elektrycznej w magnetyczną i odwrotnie, to mówimy o istnieniu drgań elektromagnetycznych w tym obwodzie. Najprostszym obwodem drgającym jest obwód składający się z kondensatora o pojemności C i z cewki indukcyjnej o indukcyjności L – Rys.81.



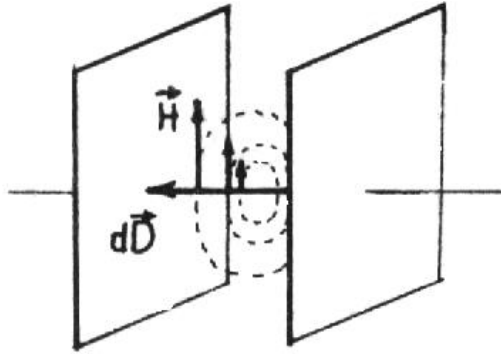
Rys.81. Zamiana energii pola elektrycznego $\frac{Q^2}{2C}$ na energię pola magnetycznego $\frac{LI^2}{2C}$ i na odwrót.

Po przyłączeniu naładowanego kondensatora do cewki, rozpocznie się proces jego rozładowania. Przez cewkę płynie prąd. Gdy kondensator rozładuje się, SEM indukcji własnej przeciwstawiając się zanikaniu pola magnetycznego cewki, będzie nadal podtrzymywała przepływ prądu w tym samym kierunku. W rezultacie kondensator zostanie naładowany przeciwnie i po zniknięciu pola magnetycznego w cewce, zacznie się ponownie rozładowywać, powodując przepływ prądu przez cewkę w kierunku przeciwnym do poprzedniego. Rozładowanie kondensatora ma charakter oscylacyjny, porównywalny z ruchem drgającym. Jeżeli oporu omowego uzwojeń cewki nie można pominąć, to drgania te są zanikające. Przyczyną jest utrata energii elektrycznej w postaci ciepła na oporze R (aby uzyskać obwód bez tłumienia, należy w układzie umieścić źródło energii uzupełniające te straty).

Rozważmy dokładniej zjawisko przepływu prądu przez obwód zawierający kondensator. W obwodzie tym prąd stały nie może płynąć, może natomiast płynąć prąd chwilowy np. podczas ładowania lub rozładowania kondensatora.

Przy przepływie prądu zmiennego przez kondensator pole wytworzone między okładkami ulega ciągłej zmianie.

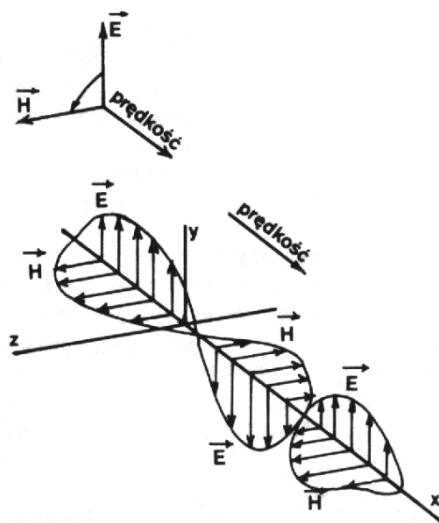
Prąd przewodzenia I jest związany z ruchem elektronów, natomiast prąd przesunięcia jest związany ze zmianą natężenia pola elektrycznego. Prąd przewodzenia oraz prąd przesunięcia jest źródłem pola magnetycznego – Rys.82.



Rys.82. Prąd przesunięcia wytwarza pole magnetyczne.

Zmienne pole magnetyczne wywołuje z kolei wirowe pole elektryczne. Zaburzenie jednego pola powoduje więc powstanie zaburzenia drugiego pola i odwrotnie. Oznacza to, że nawet w pustej przestrzeni, pozbawionej prądów elektrycznych i nieruchomych ładunków, mogą istnieć zmienne pola magnetyczne. Pola te są wzajemnie uwarunkowane i rozchodzą się w przestrzeni w postaci fali elektromagnetycznej. Wektory natężenia pola elektrycznego \vec{E} i natężenia pola magnetycznego \vec{H} w fali elektromagnetycznej są do siebie prostopadłe i leżą w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku rozchodzenia się fali –Rys.83.

Fala elektromagnetyczna jest zatem falą poprzeczną.



Rys.83. Wektory \vec{v} , \vec{E} i \vec{H} tworzą prawoskrętny układ współrzędnych.

7.15. Równania Maxwella

Fakty doświadczalne otrzymane w wyniku opisanych ośmiu doświadczeń zapoznają nas z polami elektrycznymi i magnetycznymi oraz ich wzajemnymi zależnościami.

Doświadczenia Faraday'a zakończyły dyskusję, czy występowanie sił między przewodami, w których płyną prądy, odbywa się bez czy też z udziałem czynnika umożliwiającego to działanie. Dały one początek realności istnienia pól elektrycznych i magnetycznych.

Doświadczenia wskazują, że prąd przewodzenia wytwarza pole magnetyczne.

Według koncepcji Maxwella, prąd przesunięcia, związany ze zmianą natężenia pola elektrycznego, wytwarza również pole magnetyczne. Ten postulat, niemożliwy wówczas do doświadczalnego zrealizowania prowadził do wniosku, że jeżeli powyższa hipoteza jest słuszna, wówczas możliwe jest przesyłanie energii pod postacią fal elektromagnetycznych.

Teoria „działania na odległość” i to bez udziału czynnika umożliwiającego wzajemne oddziaływanie dwóch przewodów z prądem zakładała, że działanie elektryczne zjawia się natychmiast i równocześnie we wszystkich punktach przestrzeni, niezależnie od odległości. Według koncepcji Maxwella, energia jest przenoszona przez fale, które rozchodzą się z prędkością skończoną, możliwą do obliczenia.

Hipoteza Maxwella polegała na przypuszczeniu, że w przypadku zmieniającego się pola elektrycznego, pole magnetyczne jest wytwarzane przez sumę prądów przewodzenia i przesunięcia.

Równania różniczkowe zmodyfikowane przez Maxwella są następujące:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{prawo Ampere'a}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{prawo Faraday'a}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{prawo Gaussa o beźródłowości
pola magnetycznego}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \text{prawo Gaussa o źródłowości
pola magnetycznego}$$

Równania Maxwella zapisać można również w postaci całkowej.

Opowiadające powyższym równaniom całkowe równania Maxwella są następujące:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} + \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}$$

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

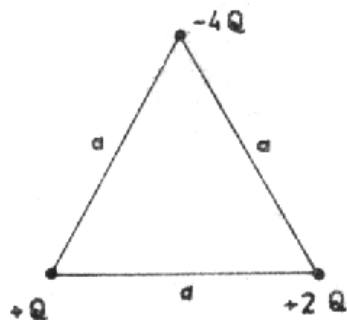
$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Równania Maxwella sugerują rozchodzenie się fal elektromagnetycznych. Jeżeli bowiem zmienne pole elektryczne wytwarza zmieniające się pole magnetyczne, to szereg takich przemian energii pola elektrycznego na pole magnetyczne i odwrotnie nie ograniczone do tego samego obszaru przestrzeni powoduje rozchodzenie się fal elektromagnetycznych.

W rozwiązaniach równań Maxwella pojawia się prędkość światła co sugeruje elektromagnetyczną naturę światła i fale elektromagnetyczne mogą rozchodzić się w próżni.

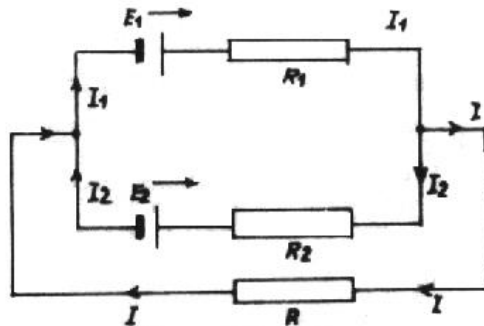
7.16. Zadania do rozdziału 7

- 7.16.1. Dwa ładunki różnoimienne o równej wielkości Q , oddalone są od siebie o $2a$. Jakie jest natężenie \vec{E} pola wytworzonego przez te ładunki w punkcie P leżącym na symetrycznej odcinka łączącego obydwie ładunki w odległości r od jego środka? Załóżmy, że $r \gg a$.
- 7.16.2. Cztery jednakowe ładunki punktowe dodatnie o wartości $Q = 10^{-7} \text{ C}$ każdy, znajdują się w wierzchołkach kwadratu o boku $a = 0.1 \text{ m}$. Znaleźć siły wywierane przez trzy ładunki na czwarty.
- 7.16.3. Trzy ładunki tworzą układ przedstawiony na poniższym rysunku. Jaka jest ich wzajemna potencjalna energia elektryczna? Przyjąć $Q = 10^{-7} \text{ C}$, $a = 0.1 \text{ m}$.

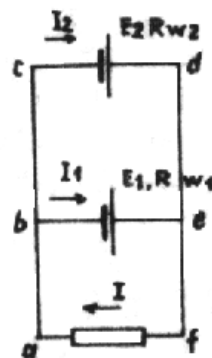


- 7.16.4. W wierzchołkach kwadratu umieszczone są ładunki punktowe $Q_1 = +1 \cdot 10^{-9} \text{ C}$, $Q_2 = -2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$, $Q_3 = +3 \cdot 10^{-9} \text{ C}$, $Q_4 = -4 \cdot 10^{-9} \text{ C}$. Wyznacz potencjał i natężenie pola elektrycznego w środku kwadratu. Przekątna kwadratu wynosi $2a = 0.2 \text{ m}$.
- 7.16.5. Dwa ładunki dodatnie Q_1 i Q_2 znajdują się w odległości l jeden od drugiego. W którym punkcie linii łączącej obydwie ładunki natężenie pola elektrycznego równa się zero?
- 7.16.6. O ile zmieni się pojemność kuli o promieniu R , jeżeli początkowo jest umieszczona w ośrodku, o przenikalności ϵ_1 a następnie w ośrodku, którego przenikalność dielektryczna wynosi $\epsilon_2 (\epsilon_2 > \epsilon_1)$?
- 7.16.7. Obliczyć pole magnetyczne długiego przewodu prostoliniowego w punkcie P oddalonym o „ a ” od przewodu, jeśli płynie w nim prąd o natężeniu I .
- 7.16.8. Obliczyć siły działające na prostokątną ramkę, której boki wynoszą $a = 5 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$, umieszczonej prostopadle do pola magnetycznego o natężeniu $H = 4 \cdot 10 \text{ A/m}$ jeżeli przez tą ramkę płynie prąd elektryczny o natężeniu $I = 2 \text{ A}$. Obliczyć strumień magnetyczny przepływający przez ramkę.
- 7.16.9. Czy można amperomierzem o oporze $R_{w1} = 0.2 \Omega$, którego największe wychylenie na skali odpowiada prądowi $I = 1.5 \text{ A}$ dołączyć do ogniwa o sile elektromotorycznej $E = 1.8 \text{ V}$ i oporze wewnętrznym $R_{w2} = 0.6 \Omega$? Jaki prąd będzie płynął przez amperomierz?

7.16.10. Obliczyć natężenie prądów płynących przez każdy z oporów, jeśli $E_1 = 2V$, $E_2 = 1.5V$, $R_1 = 2.2 \Omega$, $R_2 = 3.5 \Omega$, $R = 2 \Omega$

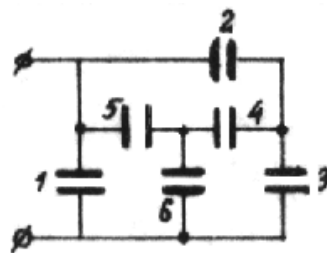


7.16.11. Dwa źródła o różnych SEM wynoszących E_1 , E_2 oraz o oporach wewnętrznych R_{w1} ,



R_{w2} połączono równolegle z oporem R . Jakie jest natężenie prądu płynącego przez ten opór?

7.16.12. Znaleźć pojemność przedstawionego na poniższym rysunku schematu połączeń jednakowych kondensatorów. Pojemność każdego kondensatora jest równa C .



7.16.13. Woltomierz, którego zakres skali wynosi $5V$ ma opór wewnętrzny 200Ω . Znaleźć wartość dodatkowego oporu, jaki należy dołączyć do woltomierza, aby możliwe były pomiary do $100V$.

7.16.14. Jeżeli do amperomierza o zakresie $I_a = 2A$ dołączyć bocznik z oporem $R = 0.5\Omega$, to zakres skali amperomierza wzrośnie 10 razy. Wyznaczyć, jaki dodatkowy opór trzeba przyłączyć do tego samego amperomierza, aby można go było zastosować jako woltomierz do pomiaru napięć do $U=220$.

7.16.15. Obliczyć energię wiązania atomu wodoru.

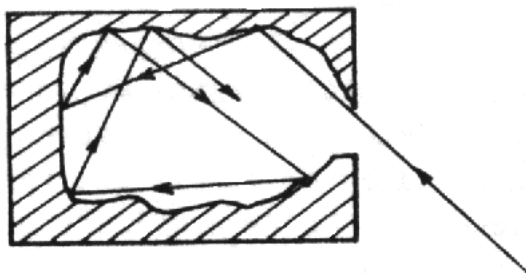
- 7.16.16. Elektron o energii 10 eV krążący w płaszczyźnie prostopadłej do jednorodnego pola magnetycznego o indukcji 10^{-4} Wb/m^2 (1Gs). Obliczyć promień orbity elektronu, jego okres obrotu, jego częstość cyklotronową.
- 7.16.17. Promień orbity elektronu w atomie wodoru wynosi $r=5 \cdot 10^9 \text{ cm}$. Znaleźć potencjał pola wytworzonego w punktach leżących na orbicie elektronu przez jądro atomu wodoru.
- 7.16.18. Natężenie prądu w obwodzie baterii o sile elektromotorycznej $E = 30 \text{ V}$ wynosi $I = 3 \text{ A}$. Napięcie na zaciskach baterii $U = 18 \text{ V}$. Znaleźć opór R obwodu zewnętrznego i opór wewnętrzny R_w baterii.
- 7.16.19. Według baterii Bohra, elektron w atomie wodoru porusza się wokół jądra po okręgu o promieniu $r = 5.3 \cdot 10^{-9} \text{ cm}$. Znaleźć pole magnetyczne jakie wytwarza elektron w środowisku kołowej orbity.

8. PRZEDMIOT BADAŃ FIZYKI KWANTOWEJ

8.1 Promieniowanie ciała doskonale czarnego

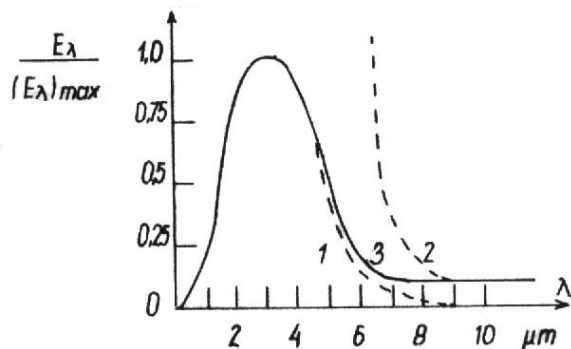
Na przełomie XIX i XX wieku zaobserwowano szereg zjawisk, których nie umiały wyjaśnić wówczas teorie fizyczne. Jednym z pierwszych zjawisk, którego nie potrafiła wytłumaczyć klasyczna fizyka (mechanika newtonowska, termodynamika oraz elektrodynamika maxwellowska) był rozkład energii promieniowania ciała doskonale czarnego w funkcji długości fali.

Aby wyeliminować parametry, które zależały od rodzaju ciała stałego emitującego promieniowanie, wprowadzono wyidealizowane pojęcie ciała doskonale czarnego. Przez ciało doskonale czarne rozumiemy taki teoretyczny obiekt, który absorbuje całe padające światła. W przyrodzie takich ciał nie ma. Najdoskonalsze w przyrodzie ciało czarne – sadza, pochłania jedynie 98 % padającego promieniowania. W warunkach laboratoryjnych modelem ciała doskonale czarnego jest niewielki otwór w komorze kulistej – Rys.85. Promień światła, który trafia przez otwór do wnętrza tej komory, zanim wyjdzie na zewnątrz, wielokrotnie odbija się od ścianek. Przy każdym odbiciu promień światła niezależnie od materiału ścianek jest częściowo pochłaniany. W wyniku wielokrotnego odbicia wewnątrz komory promień zostaje praktycznie całkowicie czarny



Rys.85. Model ciała doskonale czarnego.

Półowiczne sukcesy na drodze znalezienia krzywych rozkładów energii metodami klasycznymi zawdzięczamy prawom Wiena (część krótkofalowa) oraz Rayleigha – Jeansa (część długofalowa). Ich wyniki nie miały jednak wielkiego znaczenia w fizyce. Nie opisywały całego widma lecz tylko część. Z ich opisu nie wynikało istnienie obserwowanych maksimów – Rys.86.



Rys.86. Wykresy widmowej zdolności emisyjnej ciała doskonale czarnego według teorii Wiena (1), Rayleigha – Jeansa (2) i Plancka (3).

W 1900 r. M. Planck wyprowadził wzór który korelował z danymi doświadczalnymi:

$$E_\lambda d_\lambda = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} \right)^{-1} d\lambda \quad (246)$$

gdzie: $E_\lambda d_\lambda$ oznacza gęstość energii przypadającej na przedział długości fali d_λ , a stała h nosi nazwę stałej Plancka. Jej wartość wyznaczona na podstawie zjawiska fotoelektrycznego (paragraf 8.2) wynosi $h = 6.625 \cdot 10^{-34}$ J·s.

Przy wyprowadzeniu zależności (246) Planck założył, że atomy, które tworzą ściankę wewnętrzną ciała doskonale czarnego zachowują się jak małe oscylatory elektromagnetyczne, z których każdy ma charakterystyczną częstość drgań. Drgając wysyłają one promieniowanie i podlegają działaniu promieniowania z otoczenia. Po pewnym czasie takich działań ustali się równowaga pomiędzy oscylatorami i promieniowaniem. Każdy oscylator będzie wtedy posiadał pewną średnią energię, a promieniowanie pewien rozkład. Dla takiego przypadku, prawa elektrodynamiki klasycznej i mechaniki statystycznej klasycznej dają niezgodny z doświadczeniem opis rozkładu energii promieniowania ciała doskonale czarnego (otrzymuje się prawo Rayleigha – Jeansa). Aby usunąć tę sprzeczność, Planck uczynił następujące założenia. Stały się one podstawą fizyki kwantowej (tzw. starszej teorii kwantów):

- 1) Oscylatory w ciele doskonale czarnym nie emitują energii w sposób ciągły, lecz tylko podczas zmiany ich amplitudy drgań. Przejście od większych amplitud do mniejszych powoduje emisję promieniowania, przejście do większych amplitud jest związane z absorpcją promieniowania przez oscylator.
- 2) Oscylator może emitować energię do pola promieniowania lub absorbować z niego energię jedynie porcjami (kwantami) o energii równej

$$E = h\nu \quad (247)$$

gdzie h jest stałą (stałą Planca), ν jest częstością oscylatora.

Wzór Plancka (246) doskonale zgadza się z wynikami pomiarów rozkładu energii w widmach ciała doskonale czarnego w różnych temperaturach.

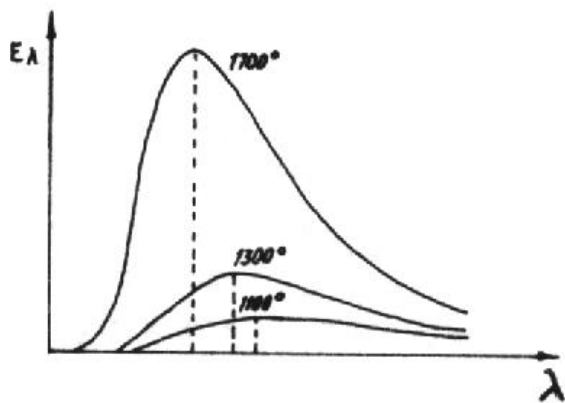
Z prawa Planca można otrzymać prawo Rayleigha – Jeansa, prawo przesunięć Wiena oraz prawo Stefana – Boltzmana. Podstawiając w równaniu (246) $\frac{hc}{\lambda kT} \ll 1$, (T – niezbyt małe), otrzymujemy prawo Rayleigha – Jeansa jako graniczny przypadek prawa Planca (dla λ w podczerwieni – patrz Rys.87.)

Różniczkując wzór (246) względem λ , a następnie przyrównując do zera, otrzymujemy prawo przesunięć Wiena

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T} \quad (248)$$

gdzie b jest wielkością stałą i dla ciał doskonale czarnych wynosi $b = 2.898 \cdot 10^{-3}$ m·K

Prawo to wypowiadamy następująco: ze wzrostem temperatury maksimum promieniowania ciała przesuwa się w stronę fal krótszych – Rys. 87.



Rys.57. Prawo przesunięć Wiena.

Rozkład promieniowania energii wielu ciał ma bardzo zbliżony charakter do przedstawionych na Rys.86. krzywych promieniowania ciał doskonale czarnych. Przykładowo, dla Słońca maksimum energii promieniowania przypada na $\lambda = 4700 \text{ \AA}$, co odpowiada temperaturze zewnętrznych warstw Słońca około 6200K.

Jeżeli scałkujemy E_λ względem λ

$$E = \int_0^{\infty} E_\lambda d\lambda$$

wówczas otrzymujemy wzór na całkowitą zdolność emisyjną ciała doskonale czarnego

$$E = \sigma T^4 \quad (249)$$

Jest to prawo Stefana – Boltzmann, które mówi, że całkowita zdolność emisyjna ciała doskonale czarnego jest proporcjonalna do czwartej potęgi jego temperatury.

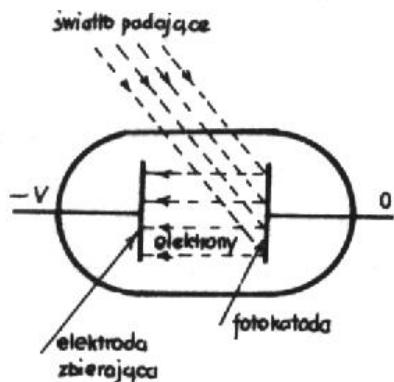
Wielkość σ dla wszystkich ciał doskonale czarnych wynosi

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$$

8.2. Zjawisko fotoelektryczne

Kolejnym zjawiskiem, które na przełomie XIX i XX w. nie mogło być poprawnie wyjaśnione na gruncie fizyki klasycznej było zjawisko fotoelektryczne zewnętrzne.

Zjawisko to polega na wybijaniu elektronów (nazywamy je również fotoelektronami) z powierzchni ciała stałego pod wpływem padającego promieniowania – Rys.88.



Rys.88. Światło o częstotliwości ν padające na fotokatodę wybija z niej elektrony o energii $\frac{mv^2}{2} = h\nu - W$.

Zjawisko fotoelektryczne zostało wykryte przez H.Hertza w 1887r. Badania Hertza, Hallwachsa i Leonarda pozwoliły ustalić trzy doświadczalne prawa:

1. Maksymalna prędkość fotoelektronów nie zależy od natężenia padającego światła, lecz jedynie od jego częstotliwości.
2. Liczba elektronów wybijanych z katody w jednostce czasu jest wprost proporcjonalna do natężenia światła.
3. Dla każdego metalu istnieje określona częstotliwość progowa ν_0 , poniżej której fotoelektrony nie są emitowane przy dowolnie silnym oświetleniu.

Oprócz powyższych faktów stwierdzono zupełny brak bezwładności zjawiska fotoelektrycznego, tzn. występuje ono natychmiast po oświetleniu powierzchni ciała o częstotliwości $\nu \geq \nu_0$. Na gruncie elektromagnetycznej teorii światła wyjaśnienie zjawiska fotoelektrycznego nie jest możliwe. Wpływające z niej wnioski nie potwierdzają obserwacji. Trudność w wyjaśnieniu praw zjawiska fotoelektrycznego na podstawie falowej teorii światła doprowadziła Einsteina w 1905r. do stworzenia kwantowej teorii światła.

A. Einstein założył, że nie tylko emisja i absorpcja światła odbywa się kwantowo, ale również w polu elektromagnetycznym energia przenosi się w sposób nieciągły, a więc kwantami świetlnymi, czyli fotonami.

Rozpatrzmy absorpcję fotonu o energii $E = h\nu$ przez elektron fotokatody – Rys.88. W wyniku absorpcji fotonu elektron będzie mógł wyrwać się z metalu, jeżeli tylko $h\nu \geq W$, gdzie W jest pracą wyjścia elektronu z fotokatody i oznacza minimalną energię, jaką musi mieć elektron, aby mógł opuścić powierzchnię danego metalu. Największą energię kinetyczną, która może otrzymać elektron znajdujemy z prawa zachowania energii

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = h\nu - W \quad (250)$$

Powyższe równanie nosi nazwę równania Einsteina dla zewnętrznego efektu fotoelektrycznego.

Aby móc ocenić prędkość wyrzucanych elektronów stosuje się napięcie przeciwnie przyłożone: plus do katody, a minus do anody. Wtedy prąd między elektrodami maleje i przy

dostatecznie wysokim napięciu U_0 przestaje płynąć zupełnie. Im większa prędkość emitowanych elektronów, tym większe musi być przyłożone napięcie hamujące.

Mamy wówczas:

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = eU_0 \quad (251)$$

Przy $U \geq |U_0|$ zjawisko fotoelektryczne nie występuje.

Ze wzoru (250) wynika, że maksymalna energia kinetyczna elektronów zależy od częstotliwości światła i pracy wyjścia W , i nie zależy od natężenia światła. Z równań (250) i (251) wynika, że zjawisko fotoelektryczne wystąpi, gdy

$$h\nu_0 \geq W \quad (252)$$

Drugie prawo zjawiska fotoelektrycznego wyjaśniamy następująco: jeśli przez N oznaczmy ogólną liczbę opuszczających fotokatodę elektronów w jednostce czasu, to ta liczba jest proporcjonalna do liczby fotonów N' przypadających w tym czasie na powierzchnię fotokatody ($N \approx N'$). Oświetlenie powierzchni fotokatody E jest proporcjonalne do natężenia światła, więc liczba fotonów trafiających w jednostce czasu na tę powierzchnię będzie

$$N' \approx \frac{E}{h\nu}$$

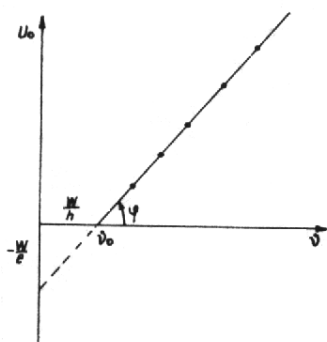
Wzory (250), (251) i (252) umożliwiają doświadczalne wyznaczenie stałej Plancka. Z ich porównania otrzymujemy

$$eU_0 = h(\nu - \nu_0) \quad (253)$$

stąd

$$h = \frac{eU_0}{\nu - \nu_0} \quad (254)$$

gdzie: U_0 jest mierzonym bezpośrednio w doświadczeniu napięciem hamującym, ν jest częstotliwością padającego światła Rys.89.



Rys.59. Stała Plancka $h = e \operatorname{tg}\varphi$.

Wyznaczona w ten sposób doświadczalnie stała Plancka wynosi

$$h = (6.62559 \pm 0.00015) \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

8.3. Dualizm korpuskularno – falowy

Zjawiska interferencji, dyfrakcji i polaryzacji światła świadczą o falowej naturze światła, inne zjawiska, jak zjawisko fotoelektryczne oraz omawiane w następnym rozdziale zjawisko Comptona są dowodami jego natury kwantowej. Zgodnie z doświadczeniem, własności światła nie może opisać samym tylko pojęciem fali albo samym pojęciem kwantu. Światło posiada jednocześnie własności falowe i kwantowe (korpuskularne). Tą szczególną własność światła dowolnego promieniowania elektromagnetycznego nazywamy dualizmem korpuskularno – falowym.

W zjawiskach atomowych światło wykazuje przede wszystkim własności kwantowe. Fotony (kwanty promieniowania elektromagnetycznego) można traktować jako cząstki posiadające określone wartości pędu i masy. Energia fotonu wyraża się wzorem

$$E = h\nu. \quad (255)$$

Masę fotonu znajdziemy z zasady równoważności masy i energii

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}, \quad (256)$$

a pęd obliczymy wzorem

$$p = mc = \frac{h\nu}{c^2} \cdot c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{E}{c}, \quad (257)$$

$$\text{gdzie: } \lambda = \frac{c}{\nu}.$$

Należy w tym miejscu zwrócić uwagę na fakt, że masa fotonu wyrażona zależnością (256) jest jego masą w ruchu (o prędkości c). Foton nie posiada masy spoczynkowej. Elektrodynamika relatywistyczna przypisuje cząstkom poruszającym się z prędkością światła (np. neutrinom) masę spoczynkową równą zeru. Wynika to z zależności (258)

$$E^2 - c^2p^2 = m_0^2c^4 \quad (258)$$

$$\text{stąd } m_0 = 0$$

Pęd jest wielkością wektorową i ma kierunek pokrywający się z kierunkiem rozchodzenia się światła. Korzystając z pojęcia wektora \vec{k} , który liczbowo jest równy

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (259)$$

$$\text{pęd wyraża się zależnością } \vec{p} = \vec{k} \hbar \quad (260)$$

$$\text{gdzie: } \hbar = \frac{h}{2\pi} = (1.05450 \pm 0.00005) \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

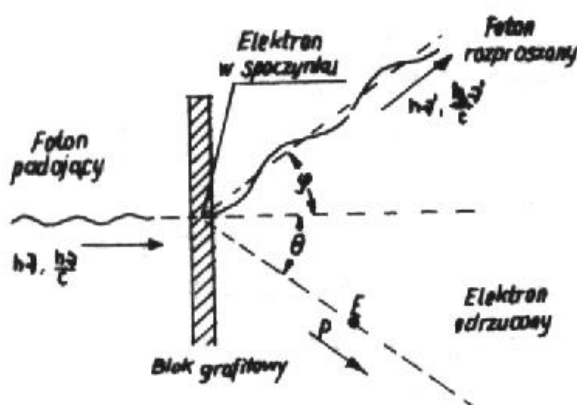
jest jedną z ważniejszych stałych w fizyce.

8.4. Zjawisko Comptona

Z zależności $E = h\nu$ wynika, że efekty kwantowe są tym wyraźniejsze, im częstotliwości ν są większe. W doświadczeniu nad rozpraszaniem kwantów o energii E i pędzie

$$\frac{h\nu}{c} \quad \text{na swobodnych spoczywających elektronach}$$

A. H. Compton użył promieni Roentgena. W tym celu Compton skierował monochromatyczną wiązkę promieni Roentgena o długości fali λ na blok grafitowy – Rys.90. – a następnie mierzył dla różnych kątów rozproszenia natężenia promieni Roentgena jako funkcje długości fali. Mimo iż wiązka padająca ma określoną długość fali λ_0 , to obserwuje się maksimum rozproszenia przy dwóch długościach fali, λ i λ_0 , przy czym $\lambda > \lambda_0$. Wielkość $\lambda - \lambda_0 = \Delta\lambda$ zwane przesunięciem Comptona zmienia się wraz z kątem φ



Rys.90. Rozpraszanie fotonów w zjawisku Comptona.

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \varphi). \quad (261)$$

Otrzymany wzór nosi nazwę wzoru Comptona.

Przesunięcie Comptona jest maksymalne dla $\varphi=180^\circ$, co odpowiada zderzeniu centralnemu. W tym przypadku padający foton zmienia kierunek na przeciwny.

Zjawisko Comptona będące kolejnym potwierdzeniem założeń Einsteina o fotonowej naturze światła wskazuje również na fakt, że foton ulega rozproszeniu jako całość, a zgodność przewidywań mechaniki kwantowej z doświadczeniami potwierdza, że foton ma zawsze

energię $E = h \cdot \nu$ i pęd $p = \frac{h \cdot \nu}{c}$.

8.5. Promieniowanie hamowania.

Energię kwantów promieniowania obliczamy wzorem

$$E = \frac{hc}{\lambda} \quad (262)$$

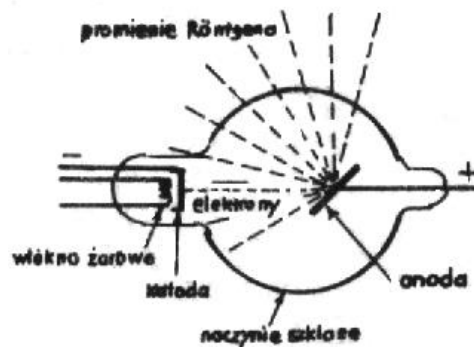
gdzie: $\nu = \frac{c}{\lambda}$

i jest ona tym mniejsza, im fale są dłuższe .

Efekty kwantowe w falach radiowych są tak małe, że nieciągłości są nieodczuwalne, dla fal świetlnych są już wyraźniejsze, a najwyraźniej można je zauważyć w promieniach rentgenowskich.

Długość fali	Energia	
	J	eV
radiowe (10 m)	$2 \cdot 10^{-26}$	$1 \cdot 10^{-7}$
światło widzialne ($7 \cdot 10^{-6} \div 4 \cdot 10^{-6}$ m)	$3 \cdot 10^{-13} \div 5 \cdot 10^{-19}$	$2 \div 3$
promieniowanie Roentgena ($1 \cdot 10^{-10} \div 1 \cdot 10^{-13}$ m)	$2 \cdot 10^{-15} \div 2 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^4 \div 1 \cdot 10^7$

Promienie Rentgena (zwane również promieniami X) uzyskujemy przy pomocy lamp rentgenowskich – Rys.91.



Rys.91. Schemat lampy rentgenowskiej. Między anodą i katodą elektrony są przyspieszane do energii rzędu 10^5 eV.

Elektrony wysyłane przez katodę ogrzewaną rozżarzoną włóknem są przyspieszane przez pole elektryczne między anodą i katodą. Promienie powstają wtedy, gdy elektrony zderzają się z anodą. W widmie promieniowania rentgenowskiego wyróżnić można widmo ciągłe, zwane widmem hamowania, oraz widmo liniowe, zwane widmem charakterystycznym.

Promieniowanie charakterystyczne wysyłane jest przez poszczególne atomy anody wzbudzone podczas zderzeń z padającymi elektronami. Promieniowanie to powstaje na tle widma ciągłego

Promieniowanie hamowania powstające na skutek hamowania szybkich elektronów dla danego napięcia przyspieszającego podczas ich ruchu w substancji ograniczone jest najmniejszą długością fali bez względu na rodzaj anody. Granicy tej nie można wytłumaczyć na gruncie klasycznym. Z kwantowego punktu widzenia występowanie λ_{\min} tłumaczymy następująco :

Równanie Einsteina dla promieni Rentgena ma postać (praca wyjścia W dla promieni Rentgena jest pomijana)

$$h\nu_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = eU_0 \quad (263)$$

stąd

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU_0}$$

Elektron w procesie zderzeń niesprężystych może zderzać się z zewnętrznymi elektronami atomów – powoduje to jonizację atomów, proces ten nosi nazwę hamowania jonizującego, względnie elektron może zderzać się niesprężysto z jądrami atomów, wówczas jeśli nie nastąpi wychwyty jego przez jądro, to elektron zostaje rozproszony. Temu procesowi może jednocześnie towarzyszyć emisja kwantu promieniowania. Ponieważ przekazywanie energii przez elektron może odbywać się na różne sposoby, dlatego też obserwujemy nie tylko graniczną długość lecz widmo ciągłe.

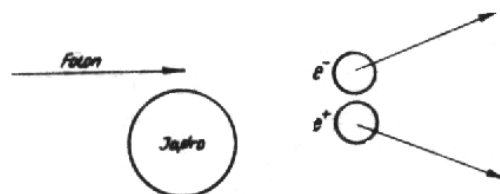
Promienie rentgenowskie są falami elektromagnetycznymi o długości fali rzędu 10^{-10} - 10^{-13} m i dlatego mają dużą zdolność przenikania ciał oraz jonizują ośrodki przez które przechodzą. Do rejestracji promieniowania rentgenowskiego używa się klisz fotograficznych, komór jonizacyjnych, liczników Geigera-Millera.

Zależność absorpcji promieni rentgenowskich od rodzaju ciała absorbującego umożliwia ich zastosowanie np. do diagnostyki medycznej. Na podobnej zasadzie oparta jest metoda wykrywania wewnętrznych wad i pęknięć w prześwietlanych promieniami rentgenowskimi przedmiotach.

8.6. Kreacja i anihilacja par

Kolejnym procesem potwierdzającym koncepcję fotonową pola elektromagnetycznego jest proces kreacji (anihilacji) par elektron-pozyton.

Proces kreacji pary elektron-pozyton zachodzi w procesie oddziaływania fotonów wysokoenergetycznych np. z polem kulombowskim jąder atomowych – Rys.92. Fotony zostają w tym procesie pochłonięte, a ich energia zostaje przekazana jako energia masy spoczynkowej (m_0c^2) i energia kinetyczna elektronu i pozytonu.



Rys.92. Kreacja pary elektron-pozyton.

Tworzenie par nie może zachodzić w pustej przestrzeni, ponieważ energia i pęd pojedynczego fotonu nie mogą być jednocześnie zachowane podczas tworzenia dwóch elektronów, jeżeli foton nie przelatuje w pobliżu ciężkiego jądra.

Podczas oddziaływania jądro przyjmuje pewien pęd i pewną energię. Z prawa zachowania energii wynika, że minimalna energia padającego fotonu musi być równa

$$h\nu_{\min} = m_0^- c^2 + m_0^+ c^2 = 2m_0 c^2$$

czyli

$$h\nu_{\min} = 1.02 \text{ MeV}$$

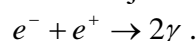
stąd maksymalna długość fali fotonu obliczona zależnością

$$h\nu_{\min} = \frac{hc}{\lambda_{\max}} = 1.02 \text{ MeV}$$

wynosi

$$\lambda_{\max} = 1.22 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Zjawisko odwrotne do zjawiska tworzenia par nosi nazwę anihilacji par



W zjawisku anihilacji par cząstka i odpowiadająca antycząstka łączą się i zamieniają się całkowicie w energię promieniowania. Również i w tym procesie ładunek, pęd i energia muszą być zachowane.

Teoretycznie możliwy jest proces odwrotny do anihilacji, tj. procesu podczas którego z dwóch zderzających się fotonów powstaje para elektron-pozyton. Do tej pory jednak nie udało się wytworzyć wiązki fotonów o wystarczającej energii i natężeniu aby ten proces zaobserwować.

8.7. Fala de Broglie'a

Według obecnych poglądów światło wykazuje jednocześnie właściwości korpuskularne i kwantowe. Dwoista natura światła ma odbicie we wzorach:

$$E = h\nu , \quad p = \frac{h\nu}{c} . \quad (264)$$

Falowe i kwantowe właściwości światła są ze sobą związane, z nie wykluczają się wzajemnie. Kwantowe właściwości światła wynikają z tego, że energia, pęd i masa promieniowania skupiona jest w fotonach, natomiast prawdopodobieństwo znajdowania fotonów w różnych punktach przestrzeni określamy falowymi właściwościami światła, a konkretnie, amplitudy fali świetlnej, dokładniej – kwadrat amplitudy fali świetlnej w danym punkcie przestrzeni jest miarą prawdopodobieństwa znalezienia fotonów w tym punkcie. Takie wyjaśnienie „paradoksu” korpuskularno-falowego światła zaproponował dla fotonów Einstein.

W 1924 roku L.de Broglie wysunął podobne przypuszczenia, że cząstki elementarne posiadają tak jak i fotony dwoistą naturę, to znaczy, poruszającym się cząstkom materii można przypisać falę (falę de Broglie).

Jeżeli pęd fotonu wyraża się wzorem

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

to dla cząstki nierelatywistycznej o masie m poruszającej się z prędkością v

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad (265)$$

Istnienie fal materii o długościach określonych zależnością (263) została potwierdzona doświadczalnie przez fizyków amerykańskich Davissona i Germera w 1927 r. Stwierdzili oni, że wiązka elektronów odbita od powierzchni kryształu niklu tworzy obraz dyfrakcyjny, analogiczny do obrazu, jaki daje światło ugięte na siatce dyfrakcyjnej. Obraz utrzymuje się nawet wtedy, gdy natężenie wiązki elektronów jest tak małe, że elektrony przechodzą pojedynczo przez przyrząd. Dyfrakcja ma charakter falowy i jeżeli występuje w tych warunkach, to świadczy o tym, że z ruchem pojedynczego elektronu można łączyć falę o ogólnej postaci danej wzorem

$$\psi(x, t) = A \sin(\omega t - kx) \quad (266)$$

względnie

$$\xi = A e^{-i(\omega t - kx)} \quad (267)$$

w powyższych wzorach:

A – oznacza amplitudę fali,

$\omega t - kx$ – fazę,

kx – fazę początkową,

$\omega = 2\pi\nu$ – częstość kątową,

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – liczbę falową.

Doświadczenie Davissona i Germera stanowią rozstrzygający dowód falowej natury cząstek (istnienie fal materii). Ze względu na niewielką długość fal materii, nie mogą one być wykryte w doświadczeniach przeprowadzanych z ciałami o dużych masach. Tutaj materia wykazuje swoje własności korpuskularne. Materia wykazuje więc tak jak i promieniowanie, dualizm korpuskularno-falowy. Powstał więc problem. Po co rozróżniać fale i cząstki? Jednakże falowy charakter fotonów nie daje poprawnego opisu takich doświadczeń jak rozpraszanie Comptona lub zjawisko fotoelektryczne, z kolei elektrony nie mogą poruszać się z prędkością światła. Obecnie przyjmujemy pogląd N.Bohra, że ani fale ani cząstka nie wykazują obu falowych i korpuskularnych własności jednocześnie w tym samym doświadczeniu. Jednakże pełny opis zjawiska wymaga użycia cech falowych i korpuskularnych w odpowiadającym im zakresie zastosowań.

Kolejnym problemem wyłaniającym się z faktu istnienia fal materii jest interpretacja fizyczna fal de Broglie'a. Jak wiemy, kwadrat amplitudy fali świetlnej w jakimkolwiek punkcie przestrzeni jest proporcjonalny do liczby fotonów trafiających w ten punkt.

Z drugiej strony natężenie fali de Broglie'a w danym punkcie przestrzeni jest miarą prawdopodobieństwa tego, że cząstka znajduje się w tym właśnie punkcie. Powyższe sformułowania określają statystyczne i probabilistyczne wytłumaczenie fal związanych z poruszającymi się cząstkami. Powyższe probabilistyczne ujęcie fal de Broglie'a pochodzi od M.Borna. Oznacza to, że fale de Broglie'a nie posiadają natury np. elektromagnetycznej, akustycznej lub innej. Wykrycie fal materii i ich kwantowego charakteru w opisie procesów wewnątrzatomowych stało się podstawą stworzenia mechaniki kwantowej. Obiektami badań mechaniki kwantowej są atomy, cząstki, kryształy, jądra atomowe oraz cząstki elementarne.

8.8. Paczki falowe. Prędkość falowa i grupowa

Wyrażenie (266) opisuje falę biegnącą o amplitudzie A i fazie $\omega t - kx$. Obliczmy prędkość fazową v_φ tej fali, to jest prędkość, z jaką przesuwa się wzdłuż kierunku jej rozchodzenia określona wartość fazy.

Niech faza fali φ , w punkcie x , w chwili t wynosi

$$\varphi = \omega t - kx$$

W chwili $t+dt$ ta sama wartość fazy wystąpi w punkcie $x+dx$. Prędkością fali, dokładniej prędkością fazową fali nazywamy wyrażenie:

$$\varphi = \omega t - kx = \text{const},$$

$$\begin{array}{ll} \text{stąd} & d\varphi = \omega dt - k dx = 0 \\ \text{więc} & v_\varphi = \frac{\omega}{k} \end{array} \quad (268)$$

Ponieważ $\omega = 2\pi\nu$ oraz $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, stąd

$$v_\varphi = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T} = v \quad (269)$$

a więc prędkość fazowa fali v_φ jest równa prędkości fali v .

Powyższe rozważania dotyczą bardzo idealnego przypadku, rozważana fala jest ściśle monochromatyczna, została wytworzona przez drgania ściśle harmoniczne i rozchodzi się w ośrodku nie wykazującym dyspersji (dyspersja fal elektromagnetycznych nie występuje tylko w próżni) to jest nie wykazuje zależności prędkości fazowej od częstotliwości. Wszystkie rzeczywiste fale wykazują przynajmniej na początku i na końcu odstępstwo od sinusoidalności. Dla takich przypadków można daną falę uważać jako nieskończoną (lecz przeliczalną) sumę fal harmonicznych. Taki zespół fal harmonicznych nazywamy paczką fal (grupą falową). Paczka fal powstaje w ten sposób, że wszystkie fale składowe interferując znoszą się dokładnie nawzajem z wyjątkiem pewnego obszaru, w obrębie którego amplituda wypadkowa jest różna od zera. Prędkość z jaką przesuwa się maksimum paczki, tzn. punkt, w którym amplitudy wszystkich drgań składowych są zgodne, nazywamy prędkością grupową paczki fal. Pojęcie prędkości grupowej zostało wprowadzone przez Rayleigha i oznacza prędkość rozchodzenia się w polu falowym energii.

Wielkość

$$\frac{x}{t} = v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (270)$$

nazywamy prędkością grupową.

Między prędkością fazową i grupową istnieje następująca zależność

$$v_g = v_\varphi - \frac{dv_\varphi}{d\lambda} \quad (271)$$

Ze wzoru (271) wynika, że jeśli prędkość fazowa nie zależy od długości fali, wówczas prędkość grupowa równa się prędkości fazowej – mówimy, że fala sinusoidalna nie ulega dyspersji. Przykładowo dla promieniowania elektromagnetycznego w próżni związek dyspersji dany jest równaniem

$$\begin{aligned} \omega &= ck \\ \text{więc} \quad v_{\varphi} &= \frac{\omega}{k} = c \\ v_g &= \frac{d\omega}{dk} = c \end{aligned}$$

Jeśli natomiast prędkość zależy od długości fali (fala ulegnie dyspersji), to wartość prędkości fazowej zależy od znaku pochodnej

$$\frac{dv_{\varphi}}{d\lambda}$$

i wówczas może zajść, że $v_{\varphi} > c$!

Wykazaliśmy więc, że prędkość grupowa fal de Broglie'a równa się prędkości ruchu cząstek.

Prędkość fazowa fal de Broglie'a wynosi

$$v_{\varphi} = \lambda v = \frac{h\nu}{mv} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v} \quad (272)$$

$$\text{czyli} \quad v_{\varphi} v_g = c^2 \quad (273)$$

Z warunku, że $v_g < c$ wynika, że prędkość fazowa fal de Broglie'a - $v_{\varphi} > c$; fale de Broglie'a nie może być więc falą elektromagnetyczną.

Rozpatrzmy jeszcze zastosowanie hipotezy de Broglie'a dla elektronu krążącego wokół jądra. Zgodnie z hipotezą de Broglie'a elektronowi o prędkości v przypisujemy falę o długości

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

Oznacza to, iż rozpatrujemy ruch fal de Broglie'a związanych z elektronami poruszającymi się po tej orbicie. Oczywiście na orbicie kołowej musi znajdować się całkowita liczba takich fal (muszą one tworzyć na orbicie stacjonarnej fale stojące), gdyż w przeciwnym wypadku na skutek interferencji fale te osłabiły się i po krótkim czasie nastąpiłoby ich wygaszenie. Stąd

$$2\pi r = n\lambda$$

Podstawiając

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

otrzymujemy

$$2\pi r = n \frac{h}{mv}$$

stąd

$$mvr = n \frac{h}{2\pi}$$

Powyższy postulat (pierwszy postulat Bohra) łączy w sobie tak jak i zależność (261) falowe i korpuskularne własności elektronu.

8.9. Budowa atomu. Przegląd niektórych wyników fizyki klasycznej i fizyki kwantowej

8.9.1. Rys historyczny

Poprawne rozwiązanie zagadnień atomowych i jądrowych uzyskuje się rozwiązując podstawowe równanie mechaniki kwantowej-równanie Schrödingera.

Zanim przedstawione zostaną wyniki rozwiązania równania Schrödingera dla atomu wodoru, prześledźmy historyczny rozwój poglądów na budowę atomu.

Nauka o nieciągłej strukturze materii zapoczątkowana została przez starożytnych greckich filozofów przyrody. Według poglądów Leukipposa i jego ucznia Demokryta (V –IV w p.n.e) cały Wszechświat jest zbudowany z bardzo małych niepodzielnych i sztywnych cząstek zwanych atomami. Według ich poglądów, właściwości ciał zależą od rodzaju i rozmieszczenia składających się na nie atomów. Poglądy Leukipposa i Demokryta zarzucone w średniowieczu odżyły dopiero w pierwszej połowie XIX w. W 1803 r. angielski fizyk i chemik J.Dalton (twórca nowoczesnej atomistyki) ogłosił, że materia zbudowana jest z niepodzielnych atomów, atomy poszczególnych pierwiastków różnią się masą, własnościami, wielkościami. W 1811 r. A.Avogadro wysunął hipotezę, że jednakowe objętości danych gazów zawierają jednakową liczbę atomów cząsteczek. Kolejny postęp na drodze do poznania struktury atomów wyznaczają prace M.Faraday'a, który odkrywając w 1833 r. zjawisko elektrolizy wykazał, że atomy lub grupy atomów mogą być obdarzone ładunkiem elektrycznym (tworzyć jony). W 1869 r. D.J. Mendelejew odkrywa prawo okresowości pierwiastków. Na bazie kinetycznej teorii materii (stworzonej w II połowie XIX w.) udało się M. Smoluchowskiemu i A.Einsteinowi wyjaśnić zjawisko ruchów Browna (1904 r.). Wyjaśnienie budowy atomu stało się możliwe dzięki odkryciom w 1896 r. swobodnego elektronu (J.J.Thomson) i promieniotwórczości naturalnej (H.Becquerel, M.Skłodowska-Curie, P.Curie). Obalili one pogląd, że atomy są sztywnymi i niepodzielnymi kulkami.

8.9.2. Model planetarny Rutherforda

W 1911 r. E. Rutherford wraz z współpracownikami, badając przechodzenie wysokoenergetycznych cząstek przez cienkie metalowe płytki złota i platyny stwierdził, że większość cząstek po przejściu przez folię zachowywała poprzedni kierunek albo odchyłała się o mały kąt. Jednak pewna ilość cząstek α podlegała odchyleniu o kąt rzędu 135° - 150° . Aby wytłumaczyć to zjawisko, Rutherford przyjął następujący model atomu: w jądrze, o wymiarach liniowych 10^{-15} m - 10^{-14} m skupiony jest cały ładunek dodatni i prawie cała masa atomu. Dookoła jądra, w odległości rzędu 10^{-10} m krążą na orbitach elektrony o niewielkiej masie. Ten pierwszy, jądrowy model atomu, nazywamy modelem planetarnym.

Mimo iż model planetarny Rutherforda umiał wyjaśnić duże kąty rozproszenia cząstek α , wskazywał, że liczba dodatnich ładunków w jądrze jest równa liczbie porządkowej w układzie okresowym Mendelejewa, to następujące fakty stanowiły przeszkodę, z którą nie mógł się ten model uporać.

Podstawmy dane liczbowe do wyrażenia na siłę dośrodkową (którą jest siła kulombowska) utrzymująca elektron na orbicie

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} \quad (274)$$

Z obliczeń wynika, że przyspieszenie elektronu jest takie, że powinien on zachowywać się jak oscylator drgający z dużą częstotliwością. Częstotliwość drgań takiego oscylatora wyznaczmy porównując wyrażenie na prędkość liniową v elektronu z wyrażeniem (274)

$$v = \omega r = 2\pi\nu r$$

stąd

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r^3}} \quad (275)$$

Podstawiając w powyższym wyrażeniu dane doświadczalne dla elektronu w atomie wodoru, otrzymujemy $\nu = 7 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$.

Wskutek promieniowania, elektron traci energię, zmniejsza prędkość oraz promień obiegu, aby w końcu spaść na jądro. Ponieważ częstość obiegu elektronu wokół jądra zmniejsza się w sposób ciągły, więc elektron emituje widmo ciągłe. Tymczasem w rzeczywistości okazuje się, że atom jest układem wyjątkowo trwałym, wysyła promieniowanie elektromagnetyczne tylko w określonych warunkach oraz atom wysyła widmo liniowe, które jest związane z budową i właściwościami jego powłoki elektronowej.

8.9.3. Postulaty Bohra. Model Bohra

W 1913 r. N.Bohr zaproponował pierwszą nieklasyczną teorię atomu będącą modyfikacją modelu Rutherforda z dodatkiem dwóch postulatów.

1. W atomie wodoru elektron krąży wokół protonu ruchem jednostajnym po okręgu pod wpływem działania siły kulombowskiej i zgodnie z prawami fizyki klasycznej (zgodnie z prawami Newtona). Spośród wszystkich torów elektronów dopuszczalnych przez elektrodynamikę klasyczną realizowane są w atomie tylko tory (tzw. tory stacjonarne lub kwantowo wyróżnione), dla których moment pędu L krążącego elektronu jest całkowitą wielokrotnością $\frac{h}{2\pi} = \hbar$:

$$\frac{h}{2\pi} = \hbar :$$

$$L = mvr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar \quad (276)$$

gdzie: h jest stałą Plancka.

Elektron znajdujący się na dozwolonej orbicie nie promieniuje energii.

2. Podczas przeskoku elektronu z toru stacjonarnego o wyższej energii E_p na tor stacjonarny E_k o mniejszej energii, emitowany jest foton o częstoci

$$\nu = \frac{E_p - E_k}{h} \quad (277)$$

(w ten sposób otrzymujemy liniowe widmo o widmie emisyjnym) natomiast np. absorpcja fotonu o energii $h\nu = E_4 - E_3$ powoduje, że nastąpi przeskok elektronu z orbity $n=3$ na orbitę $n=4$ (w ten sposób tłumaczymy powstawanie widma absorpcyjnego).

Zauważmy, że sens fizyczny postulatów Bohra nie może być wyjaśniony na gruncie fizyki klasycznej, jest on w sprzeczności z klasycznym opisem ruchu elektronu w atomie. Był on wynikiem przyjęcia przez N.Bohra idei kwantów M.Plancka.

Stan odpowiadający $n=1$ nazywamy stanem podstawowym (jest to stan o najmniejszej energii atomu), stany $n=2,3, \dots$ są stanami wzbudzonymi.

8.9.4. Widmo wodoru

Pierwszym zbadanym widmem było widmo wodoru. Uzyskuje się je z wyładowań elektrycznych w rurze zawierającej gaz jednoatomowy pod niskim ciśnieniem. Światło z rury przepuszczone przez pryzmat (urządzenie takie nazywamy spektrografem pryzmatycznym) daje widmo liniowe danego gazu.

W 1885 r. J.J.Balmer ustalił, że długości fal znanych linii widma wodoru mogą być obliczone wzorem

$$\lambda = \lambda_0 \frac{n^2}{n^2 - 4} \quad (278)$$

gdzie: $\lambda_0 = 3646.13 \text{ \AA}$
 $n=3,4,5, \dots$,

względnie

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (279)$$

gdzie: $R = 10967758 \text{ m}^{-1}$ oznacza stałą Rydberga.

Oprócz serii Balmera, w wodorze wykryto inne serie znalezione w obszarze niewidzialnym, których długości fal mogą być obliczone wzorem

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

względnie

$$\nu = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

przy czym $n = m+1, m+2, \dots$.

Dla $m = 1$ otrzymujemy serię Lymana leżącą w dalekim ultrafiolecie, dla $m = 2$ mamy więc serię Balmera, której część linii leży w części widzialnej.

Dla $m = 3, m = 4, m = 5$ i $m = 6$ mamy leżące w podczerwieni serie Paschena, Brackatta, Pfunda i Hyphreya.

8.9.5. Atom wodoru w teorii Bohra

Zastosujmy obecnie teorię Bohra do atomu wodoru i jonów wodoropodobnych (to jest jonów zawierających jeden elektron). Przykładami takich układów jest np. jednokrotnie zjonizowany hel (He) dwukrotnie zjonizowany lit (Li^{++}).

Przyjmijmy tory kołowe elektronu. Dla torów kołowych mechanika klasyczna daje

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{(Ze)e}{r^2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

gdzie: m - oznacza masę elektronu,
 Z – jest liczbą atomową i oznacza liczbę protonów.

Korzystając z I postulatu Bohra $mvr = n\hbar$ i podstawiając za $v = \omega r$ otrzymujemy wzór na dozwolone przez model Bohra promienie orbit elektronu r_n

$$r_n = n^2 \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{mZe^2}. \quad (280)$$

Dla atomu wodoru ($Z=1$) i dla $n=1$ (pierwszy promień Bohra),

$$r_1 = a_0 = 0.582 \cdot 10^{-10} \text{m}$$

Energia elektronu w atomie wodoru (w jonie wodoropodobnym) jest równa sumie energii kinetycznej i potencjalnej przyciągania elektronu i jądra.

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{(Ze)e}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Otrzymujemy, że energia atomu w pewnym stanie stacjonarnym ma postać

$$E_n = \frac{-Rh}{n^2} \quad n = 1.2.3. \dots \quad (281)$$

Znak minus w powyższym wzorze oznacza, że elektron jest przyciągany do jądra kulombowską siłą. Wartość bezwzględna wyrażenia (281) oznacza energię wiązania elektronu w atomie, znajdującym się w stanie n .

Przez energię wiązania elektronu rozumiemy wielkość pracy, jaką należy wykonać, aby oderwać elektron od atomu, czyli zjonizować atom. Na przykład energia wiązania elektronu w atomie wodoru w stanie podstawowym wynosi $E_1 = -13.6 \text{ eV}$.

Dla tej samej liczby kwantowej n , promień orbity elektronu atomu wodoropodobnego jest Z razy mniejszy od analogicznego promienia w atomie wodoru. Przykładowo, dla jednokrotnie zjonizowanego atomu helu He^+ ($Z = 2$) energia stanu $n=2$ wynosi -13.6 eV co odpowiada energii stanu podstawowego atomu wodoru.

Można wykazać, że przejście z $n = 2$ na $n = 1$ w atomie wodoru powoduje emisję fotonu o tej samej długości fali co przejście z $n = 4$ na $n = 2$ w atomie He^+ .

8.9.6. Kwantowanie przestrzenne. Liczby kwantowe

W atomie wodoru wokół jądra krąży elektron o ładunku $-e$. Poruszający się elektron jest równoważny prądowi elektrycznemu o natężeniu

$$I = -ev \quad (282)$$

Jeżeli prąd o natężeniu I okrąży pewną powierzchnię $S = \pi r^2$, to wytwarza pole magnetyczne, którego moment magnetyczny jest równy

$$\mu_l = I \cdot S \quad (283)$$

natomiast moment pędu krążącego elektronu wynosi

$$L = (mv)r = m(2\pi vr)r = 2\pi mvr^2$$

Iloraz

$$\frac{\mu_l}{L} = -\frac{e}{2m} = 8.8 \cdot 10^9 \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$$

zwany jest stosunkiem giromagnetycznym, a wielkość

$$\mu_0 = \frac{e}{2m} \hbar = 9,27 \cdot 10^{-24} \left[\frac{\text{J}}{\text{T}} \right]$$

będąc jednostką magnetycznego momentu dipolowego, nazywamy, magnetonem Bohra. W mechanice kwantowej dowodzi się, że moment pędu elektronu L_1 w dowolnym atomie może przyjmować tylko wielkości kwantowe

$$L_1 = \hbar \sqrt{l(l+1)} \quad (284)$$

gdzie: l jest tak zwaną orbitalną liczbą kwantową przyjmującą wartości

$$l=0,1,2, \dots, n-1 \quad (285)$$

Jeżeli $l = 0$, to stan elektronu nazywamy stanem s, dla $l=1$, mamy stan p. Kolejne stany oznaczone są: $l = 2$ (stan d), $l = 3$ (stan f)

W mechanice kwantowej dowodzi się, że istnieje kwantowanie przestrzenne.

Liczbę kwantową m przyjmującą wartości

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l \quad (286)$$

nazywamy liczbą kwantową magnetyczną.

Przyjmujemy, że elektron posiada własny moment pędu L_s zwany spinem elektronu. Według mechaniki kwantowej spin s elektronu jest skwantowany według prawa

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)} \quad (287)$$

l przyjmuje wartości $s = \frac{1}{2}$.

Wprowadzenie spinowej liczby kwantowej umożliwiło wyjaśnienie istnienia dużej liczby linii w widmach pierwiastków, wyjaśniło zjawisko rozszczepiania linii widmowych. Rozszczepianie linii widmowych tłumaczy się tym, że następuje rozszczepienie poziomów energetycznych elektronów w stanach wzbudzonych pod wpływem tzw. oddziaływania spinowo – orbitalnego. Dzięki oddziaływaniu spinowo – orbitalnemu, moment orbitalny sumuje się ze spinem dając całkowity moment pędu elektronu J .

$$\vec{J} = \vec{L}_1 + \vec{L}_s \quad (288)$$

Całkowity moment pędu jest skwantowany. Wartość liczbową całkowitego momentu pędu określamy wzorem

$$|J| = \hbar \sqrt{j(j+1)}$$

Przyjmuje on wartości

$$j = \frac{1}{2} \quad \text{dla } l=0$$

$$j = l \pm \frac{1}{2} \quad \text{dla } l \geq 1 \quad (289)$$

W 1925 r. W. Pauli ustalił kwantowomechaniczne prawo zwane zasadą (zasadą wyboru, lub zasadą zakazu) Pauliego. Brzmi ono następująco : w dowolnym układzie zawierającym dużą liczbę elektronów w stanie stacjonarnym, - określonym zespołem czterech liczb kwantowych: głównej liczby n, orbitalnej l, całkowitego momentu pędu j oraz liczby kwantowej m_j (rzut całkowitego momentu pędu na kierunek zewnętrznego pola magnetycznego), nie może znaleźć się więcej niż jeden elektron.

Zasada Pauliego będąca wynikiem założenia nierozróżnialności identycznych cząstek w mikroświecie spełnia wybitną rolę w rozwoju współczesnej fizyki atomowej i jądrowej. W oparciu o zasadę Pauliego znalazł swoje uzasadnienie między innymi układ okresowy pierwiastków chemicznych Mendelejewa.

Zgodnie z zasadą Pauliego, elektrony w atomie zajmujące zbiór stanów o jednakowej liczbie kwantowej n tworzą powłokę elektronową. Dla kolejnych liczb kwantowych n=1, n=2, n=3, ... rozróżnia się powłoki K, L, M, N, O, ... Maksymalna liczba elektronów na poszczególnych powłokach wynosi odpowiednio 2, 8, 18, 32, 50,

W każdej z powłok elektrony rozmieszczają się w podpowłokach. Podpowłoka odpowiada określonej wartości orbitalnej liczby kwantowej l. Przykładowo, dwie pierwsze powłoki powłok

K, L, M, ... scharakteryzowane są następującymi liczbami kwantowymi.

Powłoka	n	l	j	m _j	Liczba Elektronów
K	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	2
L	2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	8
			1	$\frac{1}{2}$	
		$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$		
		$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}$		

8.10. Zadania do rozdziału 8

8.10.1. Obliczyć jaką ilość energii otrzymuje w ciągu 1 minuty powierzchnia 1m^2 Ziemi (pominąć absorpcję w atmosferze wskutek promieniowania Słońca, jeżeli temperatura powierzchni Słońca wynosi 5750K , promień Słońca $r=695.6 \cdot 10^3\text{km}$, odległość Ziemi od Słońca wynosi $R=1.495 \cdot 10^8\text{km}$. Przyjąć, że Słońce promieniuje jak ciało doskonale czarne. Jaką ilość energii wysyła Słońce w ciągu 1 min?

8.10.2. Ciało doskonale czarne o promieniu R w stałej temperaturze T promieniuje energię w ilości Φ . obliczyć temperaturę ciała.

8.10.3. Doświadczalnie wyznaczono następujące wartości napięć hamujących dla fotoelektronów

Długość fali (10^{-10}m)	2536	3132	3650	4047
Napięcie hamujące (V)	1,95	0,98	0,50	0,14

Na podstawie tych wyników sporządzić wykres i wyznaczyć z niego wartości stałej Plancka.

8.10.4. Z jaką prędkością powinien poruszać się elektron, aby przy zderzeniu z płytką wolframową wyrwał z niej nowy elektron? Praca wyjścia z wolframu wynosi 4.53eV .

8.10.5. Z jaką maksymalną prędkością wylatują elektrony z metalu, dla którego praca wyjścia $W = 5.3\text{eV}$ jeśli metal oświetlamy wiązką światła o długości $\lambda=0.2\mu\text{m}$?

8.10.6. Ile razy energia fotonu promieniowania rentgenowskiego o długości fali $\lambda_1 = 1\text{Å}$ jest większa od energii fotonu światła widzialnego o długości fali $\lambda_2=0.4\mu\text{m}$?

8.10.7. W jakiej temperaturze T średnia energia ruchu cieplnego równa się energii fotonów promieniowania podczerwonego o długości fali $\lambda = 10000\text{Å}$?

8.10.8 Średnia długość fali promieniowania żarówki wynosi $1 \cdot 10^{-7}\text{m}$. Jaka liczba fotonów jest wysyłana przez tę żarówkę o mocy 200W w jednostce czasu?

8.10.9. Jaka jest maksymalna liczba elektronów na orbicie 2s, 2p, 3s, 3p, 3d, 4s, 4p, 4d, 4f?

8.10.10 . Poszczególne orbity powłok elektronów oznaczamy s, p, d, f. Scharakteryzowane są one odpowiednio liczbą kwantową $l = 0, 1, 2, 3$. Korzystając z zakazu Pauliniego wyjaśnij znaczenie zapisu $1s^21s^22p^63s^23p^64s^1$.

8.10.11. Opisz konfigurację elektronów na poszczególnych podpowłokach stanu podstawowego następujących pierwiastków układu okresowego Mendelejewa: ${}^6\text{C}$, ${}^8\text{O}$, ${}^{11}\text{Na}$, ${}^{18}\text{Ar}$.

8.10.12. Podaj liczby kwantowe n, l, j, m_j dla powłoki M.

8.10.13. Jakie linie widmowe powstaną w części widmowej światła białego przy wzbudzeniu atomów wodoru elektronami o energii 13 eV?

9. ELEMENTY FIZYKI JĄDROWEJ

9.1. Podstawowe własności jąder atomowych

Fizyka jądrowa jest nauką o budowie jądra atomowego, jego przemianach promieniotwórczych i jego oddziaływaniach z innymi jądrami i cząstkami. Jądra stabilne (jądra trwałe) charakteryzujemy ładunkiem, masą, energią wiązania, spinem, momentem magnetycznym oraz promieniem. Jądra promieniotwórcze (jądra nietrwałe) charakteryzujemy dodatkowo czasem połowicznego rozpadu, rodzajem rozpadu i energią wysyłanych cząstek.

Jądro składa się z protonów i neutronów, często uważanych za dwa różne stany ładunkowe jednej cząstki, zwanej nukleonem. Nukleon w postaci naładowanej (ładunkiem dodatnim) nazywany jest protonem, a w postaci obojętnej – neutronem. Jądra wszystkich pierwiastków są kombinacjami określonej liczby protonów i neutronów i noszą ogólną nazwę nuklidów.

Nuklid pierwiastka o symbolu chemicznym X oznaczamy schematycznie następująco:



gdzie: Z jest liczbą atomową i oznacza liczbę protonów,
A jest liczbą masową i oznacza całkowitą liczbę protonów i neutronów
($A = Z + N$),
N jest liczbą neutronów ($N = A - Z$).

Jądro zawierające Z protonów posiada ładunek równy całkowitej wielokrotności ładunku elementarnego $Q = Ze$, gdzie e oznacza ładunek elektronu.

Doświadczenie nad rozpraszaniem naładowanych cząstek α na jądram o danej liczbie masowej A umożliwiają określenie promieni bombardowanych jąder.

$$R \approx R_0 \sqrt[3]{A} \cdot 10^{-15} m, \quad R_0 \approx 1,4$$

Masa jądra jest w przybliżeniu równa Am (m – masa pojedynczego nukleonu). Dzieliąc masę jądra przez jego objętość $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ otrzymujemy gęstość jądra

$$\rho = \frac{Am}{\frac{4}{3}\pi R^3} = const.$$

Gdy do powyższego równania podstawimy wartości liczbowe, to otrzymuje się wartość około 10^{17} kg/m^3 .

Do pomiaru masy jądra stosujemy spektrografy i spektrometry masowe.

Zasada pomiaru masy jonu o ładunku Q przyśpieszonym napięciem U w jednorodnym polu o indukcji \vec{B} (wektor prędkości $\vec{v} \perp \vec{B}$) polega na pomiarze promienia zakrzywienia R toru przez siłę Lorentza. Masę jonu wyznaczamy z zależności

$$m = \frac{R^2 B^2 Q}{2U}$$

Od 1961 r. w fizyce i chemii masy poszczególnych atomów i jąder wyrażamy zwykle w jednostkach masy atomowej. Jednostką masy atomowej (u) jest $\frac{1}{12}$ części masy izotopu węgla $^{12}_6\text{C}$ i wynosi ona

$$1 \text{ u} = 1.6603 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 931.5 \text{ MeV}$$

Według najnowszych danych masa protonu (m_p) i neutronu (m_n) wyrażona w jednostkach masy atomowej w jednostkach masy elektronu (m_e) wynosi

$$m_p = 1,0076 \text{ u} = 1836,1 m_e$$

$$m_n = 1,0090 \text{ u} = 1838,6 m_e$$

Przykładowe masy niektórych izotopów pierwiastków przedstawia poniższa tabela

$$^2_1\text{H} = 2.0141 \text{ u}$$

$$^3_1\text{H} = 3.0160 \text{ u}$$

$$^4_2\text{He} = 4.0026 \text{ u}$$

$$^7_3\text{Li} = 7.0160 \text{ u}$$

$$^{14}_7\text{N} = 14,0030 \text{ u}$$

$$^{17}_8\text{O} = 16.9991 \text{ u}$$

$$^{235}_{92}\text{U} = 235.0439 \text{ u}$$

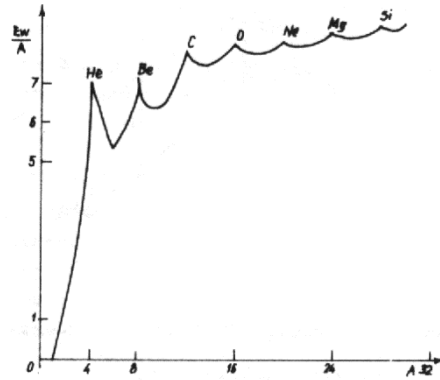
Jądra pierwiastków mogą charakteryzować się różnymi wartościami Z, N, A i tak jeśli pierwiastki posiadają to samo Z, różne N – nazywamy je izotopami np. $^{28}_{14}\text{Si}$, $^{29}_{14}\text{Si}$, $^{30}_{14}\text{Si}$, $^{32}_{14}\text{Si}$ to samo A, różne N i Z – nazywamy je izotopami np. $^{16}_8\text{O}$, $^{16}_7\text{N}$.

Pomiary mas jąder wykazują, że masa spoczynkowa jądra jest mniejsza niż suma mas spoczynkowych swobodnych nukleonów, z których się ono składa. Ta różnica mas wynika z energii wiązania jądra. Energią wiązania E_w Jądra nazywamy pomnożoną przez c^2 sumę mas Z swobodnych protonów o masie M_p i N swobodnych neutronów o masie M_n pomniejszoną o masę m_j jądra zawierającego $A = N + Z$ nukleonów

$$E_w = c^2(Zm_p + Nm_n - m_j) \quad (290)$$

Wyrażenie w nawiasie nosi nazwę defektu masy Δm .

Dla jąder ze środkowej części układu Mendelejewa energia wiązania liczona na jeden nukleon wynosi około 8.7 MeV, dla jąder bardzo ciężkich – około 1.6 MeV, dla jąder bardzo lekkich podlega dużym zmianom – Rys.93. i wynosi około 7 MeV

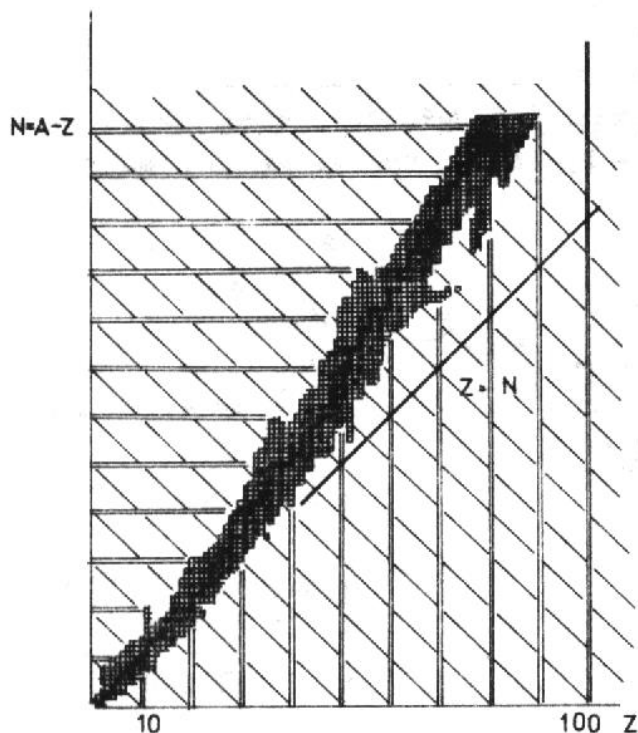


Rys.93. Energia wiązania w MeV przypadająca na jeden nukleon jako funkcja liczby masowej A .

Na Rys.93. wyraźnie można dostrzec wyjątkowo duże wartości E_w/A dla takich jąder jak ${}^4_2\text{He}$, ${}^{12}_6\text{C}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{24}_{12}\text{Mg}$, ${}^{28}_{14}\text{Si}$, itd. nieco dokładniej ten fakt będzie omówiony w następnym paragrafie.

Obecnie znamy około 300 izotopów trwałych i około 2000 izotopów promieniotwórczych wytworzonych sztucznie. Izotopy trwałe tworzą – (patrz Rys.73.) tak zwaną „ścieżkę stabilności”. Jądra leżące powyżej „ścieżki stabilności” podlegają tzw. Rozpadowi β^- , leżące poniżej – rozpadowi β^+ względnie tzw. wychytowi elektronu orbitalnego.

Przebieg zależności N od Z przedstawiony na Rys.94. zależy od pewnych własności sił jądrowych.



Rys.94. „Ścieżka stabilności” znanych jąder.

Cechą charakterystyczną sił jądrowych jest to, że energia wiązania jądra zależy od liczby protonów i neutronów mają wyjątkowo duże energie wiązania. Są więc jądrami o większej stabilności niż jądra nieparzysto – parzyste względnie nieparzysto-nieparzyste i dlatego ich częstość występowania w przyrodzie jest największa. Przykładowo w przyrodzie występuje 161 nuklidów, dla których Z i N są parzyste, 54 nuklidów, dla których Z jest parzyste, N – nieparzyste, 50 nuklidów o Z – nieparzystym, N – parzystym i tylko 4 nuklidy o Z i N nieparzystym. Jądra atomowe, których liczby protonów lub neutronów osiągają wartość 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 i 152 wyróżniają się dużą stabilnością a liczby te zostały nazwane magicznymi np: ${}^4_2\text{He}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ i ${}^{208}_{82}\text{Pb}$.

Przegląd podstawowych własności jąder atomowych zakończymy omówieniem pojęcia spinu i momentu magnetycznego jądra. Własny moment pędu jądra, zwany spinem, jest zależny od składu i budowy jądra. Na wartość spinu jądra ma wpływ parzystość liczb Z i N. Spin jądra jako całkowity własny moment pędu nukleonów zależy nie tylko od wartości własnych momentów pędu nukleonów, lecz również od wartości momentu pędu związanego z ruchem nukleonów w jądrze, zwanego momentem orbitalnym. Spin jądra jest sumą wektorową spinów nukleonów i momentu orbitalnego.

Jądra atomowe mają również moment magnetyczny. Magnetyczny moment dipolowy jądra wyrażony w magnetonach jądrowych

$$\mu_j = \frac{e\hbar}{2m_p}$$

wynosi dla protonu $\mu_p = +2.79 \mu_j$ a dla neutronu $\mu_n = -1.91 \mu_j$. Ujemny znak składowej j „z” momentu magnetycznego neutronu wskazuje, że jest on przeciwnie skierowany do obserwowanego momentu pędu neutronu. Powyższych wartości nie można łatwo wytłumaczyć

teoretycznie. Szczególnie trudno jest zrozumieć, dlaczego neutron, który jest cząstką elektrycznie obojętną, ma moment magnetyczny.

9.2. Siły jądrowe. Modele jądrowe

W skład jądra atomowego wchodzi protony i neutrony. Oprócz nich mogą w skład jądra wchodzić hiperony. Powstają wówczas hiper jądra odkryte doświadczalnie w 1952 r. przez fizyków polskich M. Danysza i J. Pniewskiego. Wszystkie hiperjądra są nietrwałe o czasie życia rzędu 10^{-6} s.

Natura sił jądrowych utrzymujących nukleony w jądrze nie została do tej pory w pełni wyjaśniona i zbadana. Na podstawie przeprowadzonych badań nad zderzeniami nukleonów naturę sił jądrowych można scharakteryzować następująco:

1. Siły jądrowe działające między dwoma protonami są tego samego rodzaju, co siły działające między dwoma neutronami, czy też siły działające między protonem i neutronem. Są to oddziaływania typu przyciągającego. Ta niezależność ładunkowa w oddziaływaniach mówi, że nie są to siły elektromagnetyczne.
2. Energia wiązania jest proporcjonalna do liczby nukleonów w jądrze a nie do kwadratu liczby nukleonów. Oznacza to, że każda z A nukleonów nie oddziałuje z wszystkimi $A-1$ pozostałymi nukleonami, lecz oddziaływanie jądrowe ulega wysyceniu już na kilku wiązaniach. Jest to własność wysycenia.
3. Siły jądrowe są siłami krótkozasięgowymi. Siły te są około 100 razy większe od sił kulombowskich występujących na odległościach rzędu 10^{-15} m. Siły jądrowe przestają odgrywać jakąkolwiek rolę na odległościach większych niż 10^{-10} m.
4. Siły jądrowe zależą od orientacji ich spinów.
5. Siły jądrowe nie są siłami centralnymi, ich potencjał nie ma symetrii kulistej.
6. Siły jądrowe są siłami wymiennymi, co oznacza, że oddziaływanie protonów i neutronów wewnątrz jądra polega na wymianie cząstek, którymi są mezony π .

Oprócz sił jądrowych występują w jądrze również siły elektromagnetyczne, słabe oddziaływania oraz siły grawitacyjne. Być może siły jądrowe, które interpretujemy jako wymianę mezonów między nukleonami są szczególnym przypadkiem sił międzykwarkowych.

W celu wyjaśnienia właściwości jąder i przebiegu procesów jądrowych wykorzystuje się różne modele jądrowe. Niezadowolający stan wiadomości o oddziaływaniach między nukleonami nie pozwala na zbudowanie pełnej teorii struktury jądra atomowego. W zależności od przyjętego oddziaływania między nukleonami, modele jądrowe dzielimy na trzy grupy:

- a) modele silnego sprzężenia (model kroplowy), w którym przyjmujemy, że oddziaływania między nukleonami są tak silne, że ruchy ich w jądrze są całkowicie skorelowane,
- b) modele cząstek niezależnych (model powłokowy), w którym oddziaływania między cząstkami można zastąpić pewnym sferycznym symetrycznym polem, w którym nukleony poruszają się niezależnie od siebie,
- c) w kolektywnym modelu jądra atomowego, podanym przez Bohra, łączy się cechy modelu powłokowego i kroplowego. Przyjmuje się, że ruch nukleonów, znajdujących się na

zewnątrz zamkniętych powłok, wywołuje deformację powłokowej struktury „rdzenia jądra”. Ruch związany z deformacją odpowiada kolektywnym ruchom nukleonów w jądrze i jest opisany przy pomocy metod hydrodynamiki cieczy nieściślej.

Model kropłowy jądra atomowego zaproponowany przez N. Bohra powstał na gruncie analogii między jądrem atomowym i kroplą cieczy. Wyobraźmy sobie jądro jako zespół silnie oddziałujących nukleonów, podobnie do cząstek kropli cieczy, które wnoszą jednakowy wkład do właściwości całego układu. W modelu kropłowym przyjmujemy następujące założenia:

- materia jądrowa jest nieściśliwa, wszystkie jądra mają jednakową gęstość,
- siły jądrowe są siłami krótkiego zasięgu i działają tylko między sąsiednimi nukleonami,
- w jądrze występują słabe siły kulombowskie odpychania między protonami oraz silne siły jądrowe przyciągania jednakowe dla wszystkich typów nukleonów,
- średnia energia wiązania przypadająca na jeden nukleon w jądrze jest w przybliżeniu stała.

Na podstawie modelu kropłowego Weizsäckera zaproponował półempiryczny wzór pozwalający na obliczenie energii wiązania. Energię wiązania można przedstawić w postaci sumy, w której dla poszczególnych składników wprowadza się poprawki z danych empirycznych:

$$E_w = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + \dots + E_n$$

Kolejne poprawki uwzględniają: efekt objętościowy, efekt powierzchniowy, efekt elektrostatycznego odpychania kulombowskiego, efekt związany z nadwyżką liczby neutronów nad liczbą protonów oraz efekt uwarunkowany siłami wymiennymi, dzięki którym w jądrze tworzą się pary protonów i pary neutronów.

Znajdując energię wiązania jądra można wyznaczyć defekt masy jądra

$$\Delta m = \frac{E_w}{c^2}$$

a korzystając następnie z zależności (290) możemy obliczyć masę dowolnego jądra zawierającego Z protonów i $A-Z$ neutronów:

$$m(A,Z) = Zm_p + (A-Z)m_n - \Delta m \quad (291)$$

Powyższe wyrażenie po podstawieniu odpowiednich wartości u podaje wzór na masę dowolnego atomu o liczbie atomowej Z i liczbie masowej A . Zależność ta dla jąder daje bardzo dobre przybliżenie. Model kropłowy jądra umożliwia wyjaśnienie procesów jądrowych związanych z promieniowaniem α , β , γ i rozszczepieniem jąder.

Model powłokowy jądra jest wzorowany w dużym stopniu na elektronowej teorii struktury atomu Bohra. W modelu tym zakładamy, że protony i neutrony poruszają się niezależnie od siebie w polu mezonowym o odpowiednio skonstruowanym potencjale. Stan jądra otrzymuje się przez zapełnienie najniższych poziomów neutronami i protonami z uwzględnieniem zasady Pauliego, która nie zezwala parze neutronów lub parze protonów na zajmowanie tego samego poziomu energetycznego lecz dopuszcza to dla pary neutron-proton. Punktem wyjścia modelu powłokowego stały się tzw. liczby magiczne jako liczby cząstek

odpowiadające zapełnionym powłokom. O ich istnieniu można wnosić z obserwacji rozpadów promieniotwórczych α , β .

Przez analogię do modelu powłokowego atomu, rozmieszczenie poszczególnych nukleonów w powłokach można scharakteryzować główną liczbę kwantową n , orbitalną liczbę l oraz spinową liczbę kwantową s . Całkowity moment pędu charakteryzuje liczba kwantowa $j = l + s$. W fizyce atomowej uwzględnienie oddziaływania między spinem elektronu i jego orbitalnym momentem pędu wprowadza tzw. subtelny strukturę poziomów. W modelu powłokowym wprowadza się podobne oddziaływania spin – orbita.

Model powłokowy daje dobre wyniki dotyczące spinu jądrowego, momentów magnetycznych jąder lekkich.

9.3. Przemiany promieniotwórcze. Prawa przemian promieniotwórczych

W 1896 r. Henri Becquerel zaobserwował naświetlające działanie związków uranu na nie wywołane klisze fotograficzne. Odkrycie to dało początek badaniom nad tak zwanym zjawiskiem promieniotwórczości naturalnej. W 1898 r. Piotr i Maria Curie odkryli, że smolista ruda uranowa promieniuje znacznie silniej niż uran.

Po wieloletnich pracach udało im się wyodrębnić dwa nowe pierwiastki promieniotwórcze: polon ${}_{84}^{210}\text{Po}$ i rad ${}_{88}^{226}\text{Ra}$. Ciała te nazwano radioaktywnymi. Obecnie nauka poznała już kilkadziesiąt ciał radioaktywnych. Badanie ciał promieniotwórczych wykazało istnienie tzw. promieniowania α , β , γ . Wszystkie rodzaje promieniowań mają zdolność działania chemicznego, zaciemniają klisze fotograficzne. Promieniowanie radioaktywne powoduje jonizację gazów, wzbudza światło fluoroscencyjne. Przebieg procesu radioaktywnego w czasie zupełnie nie zależy od warunków zewnętrznych ani też od koncentracji atomów. Prędkość rozpadu nie zależy od tego, czy rozpadająca się substancja ma postać czystego pierwiastka czy związku chemicznego.

W procesie rozpadu promieniotwórczego liczba atomów pierwiastka ulegając rozpadowi maleje z biegiem czasu. Według koncepcji Rutherforda, powyższe fakty można wyjaśnić przyjmując model rozpadającego się jądra atomowego.

Zakładamy, że prawdopodobieństwo rozpadu na jednostkę czasu jest dla pojedynczego jądra stałe. Przyjmujemy, że w chwili $t = 0$ mamy N_0 atomów rozpadającego się pierwiastka. Jeżeli w pewnej chwili liczba atomów ciała promieniotwórczego wynosi N , to liczba dN jąder rozpadających się w czasie dt jest proporcjonalna do N i do dt

$$-dN = \lambda N dt \quad (291)$$

przy czym znak minus oznacza ubytek liczby atomów N . Po rozdzieleniu zmiennych i scałkowaniu otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{dN}{N} &= -\lambda dt, \\ \int_{N_0}^N \frac{dN}{N} &= -\int_0^t \lambda dt, \\ \ln \frac{N}{N_0} &= -\lambda t, \\ N &= N_0 e^{-\lambda t} \end{aligned} \quad (292)$$

Jeżeli przez T oznaczymy czas, podczas którego liczba atomów zmniejsza się do połowy, to

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-\lambda T}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T}$$

Po obustronnym zlogarytmowaniu otrzymujemy

$$-\ln 2 = -\lambda T$$

więc

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} \quad (293)$$

Czas T określony zależnością (293) nosi nazwę czasu połowicznego rozpadu. Po czasie T , połowa atomów (to jest jąder) danego pierwiastka zanika, po upływie następnego czasu T znowu zanika połowa pozostałej liczby jąder itd.

Często jądra powstające w wyniku rozpadu promieniotwórczego są nietrwałe i rozpadają się z inną stałą rozpadu niż substancje macierzyste. Mówimy wówczas o sukcesywnym rozpadzie promieniotwórczym. Załóżmy, że jądra 1 rozpadają się ze stałą rozpadu λ_1 , na promieniotwórcze jądra 2, które z kolei ze stałą rozpadu λ_2 rozpadają się, dając trwałe jądra 3.

Niech w chwili $t = 0$ liczby tych jąder wynoszą kolejno N_{01} , N_{02} , N_{03} . Liczba jąder 1 zmienia się przez rozpad części jąder ze stałą rozpadu λ_1 :

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1$$

Liczba jąder 2 wzrasta wskutek rozpadu jąder 1, ale maleje przez rozpad ze stałą rozpadu λ_2 , czyli

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$$

Liczba jąder 3 wzrasta wskutek rozpadu jąder 2, czyli

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2$$

Po rozdzieleniu zmiennych i scałkowaniu powyższych równań otrzymujemy:

$$N_1 = N_{01} e^{-\lambda_1 t}$$

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{01} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) + N_{02} e^{-\lambda_2 t}$$

$$N_3 = N_{01} \left[1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \right] +$$

$$+ N_{02} (1 - e^{-\lambda_2 t}) + N_{03}$$

Jeśli przyjmiemy, że w chwili $t = 0$, mamy tylko jądra N_1 , w liczbie N_{01} , a $N_{02} = N_{03} = 0$, wówczas powyższe równania upraszczają się do następujących:

$$N_1 = N_{01}e^{-\lambda_1 t} \quad (294)$$

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{01} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \quad (295)$$

$$N_3 = N_{01} \left[1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \right] \quad (296)$$

Rozpatrzmy obecnie przypadek, gdy $\lambda_2 \gg \lambda_1$. Wówczas wzór (295) można zapisać w przybliżeniu

$$N_2 \approx N_{01} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

Dla dostatecznie dużych wartości t

$$e^{-\lambda_1 t} \gg e^{-\lambda_2 t},$$

a więc
$$N_2 \approx N_{01} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_1 t}.$$

Korzystając obecnie z równania (294) mamy

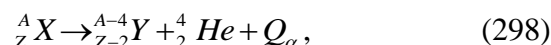
$$N_2 \approx N_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

skąd otrzymujemy

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (297)$$

Równanie (297) nosi nazwę równania równowagi promieniotwórczej. Głosi ono, że w stanie równowagi promieniotwórczej liczby nuklidów są wprost proporcjonalne do ich czasów połowicznego rozpadu. Warunek powyższy można uogólnić na dłuższe łańcuchy produktów rozpadu promieniotwórczego.

W wyniku analizy produktów rozpadów radioaktywnych odkryto prawo Soddy'ego-Fajansa: przy rozpadzie α , z jądra X jest wyrzucona cząstka α (jądro helu) – powstaje jądro o ładunku zmniejszonym o 2 ładunki elementarne i o masie mniejszej o 4 jednostki mas atomowych. Pierwiastek przesuwa się o dwa miejsca do przodu w tablicy Mendelejewa:



przy rozpadzie β z jądra atomu X wyrzucany jest elektron, nowopowstałe jądro atomu Y powiększa swój ładunek o jeden ładunek elementarny dodatni, natomiast liczba masowa pozostaje bez zmian. Jądra pierwiastka Y przesuwa się o jedno miejsce dalej w tablicy Mendelejewa:



Jeżeli jądro X jest w stanie wzbudzonym (X^*) wówczas przechodzi w stan podstawowy X przez emisję kwantu γ (rozpad γ). Położenie pierwiastka w układzie okresowym przy emisji promieniowania γ nie ulega zmianie:



Dla jąder ciężkich poczynając od $A \approx 200$ rozpad α jest zjawiskiem powszechnym. Jądra te tworzą trzy rodziny (szeregi) naturalnie promieniotwórcze i jedną rodzinę sztucznie promieniotwórczą (patrz paragraf 9.7). Nazwy poszczególnych rodzin pochodzą od elementu rodziny o najdłuższym czasie życia. Liczby masowe elementów każdej z rodzin promieniotwórczych są określone związkiem

$$A = 4n + k$$

gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą, k = 0, 1, 2, 3 – odpowiednio dla danej rodziny.

Dla k = 0	mamy rodzinę toru ${}^{232}_{90}\text{Th}$
Dla k = 1	rodzinę neptunu ${}^{237}_{93}\text{Np}$ (rodzina otrzymana sztucznie)
Dla k = 2	rodzinę uranu ${}^{238}_{92}\text{U}$
Dla k = 3	rodzinę aktynu ${}^{235}_{92}\text{U}$

Naturalne rodziny promieniotwórcze kończą się na jednym z izotopów ołowiu. Czas połowicznego rozpadu dla „protoplasty” danej rodziny promieniotwórczej wynosi

dla rodziny toru	$1.41 \cdot 10^{10}$ lat
dla rodziny uranu	$4.51 \cdot 10^9$ lat
dla rodziny aktynu	$7.15 \cdot 10^8$ lat

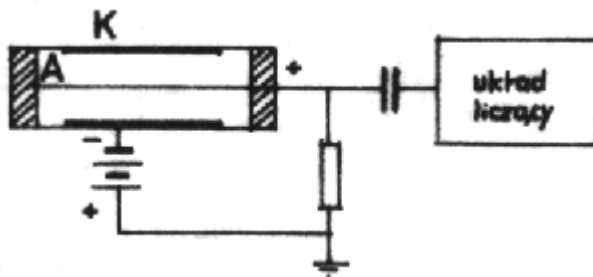
Sztucznie otrzymana rodzina neptunu wywodzi swój początek od jądra plutonu ${}^{241}_{94}\text{Pu}$ o czasie połowicznego rozpadu 13 lat, z którego po emisji cząstki β otrzymujemy jądro ${}^{241}_{95}\text{Am}$ o czasie połowicznego rozpadu 458 lat. Jądro to będąc emitentem cząstek α przekształca się w jądro ${}^{237}_{93}\text{Np}$ o czasie połowicznego rozpadu $2.2 \cdot 10^6$ lat. Szereg ten kończy się na trwałym jądrze ${}^{209}_{83}\text{Bi}$.

9.4. Podstawowe detektory promieniowania

Wszystkie przyrządy służące do wykrywania promieniowania jądrowego i jonizującego dzielimy na trzy grupy. Do pierwszej grupy zaliczamy przyrządy, w których przy przejściu promieniowania powstaje i zostaje zarejestrowany impuls prądowy (napięciowy). Zaliczamy do nich między innymi liczniki Geigera-Millera. Do drugiej grupy zaliczamy liczniki scyntalacyjne i liczniki Czerenkowa. Do trzeciej grupy zaliczamy przyrządy fotograficzne fotografujące tory cząstek jonizujących. Najważniejszymi przedstawicielami tej grupy przyrządów są komory Wilsona i komory pęcherzykowe.

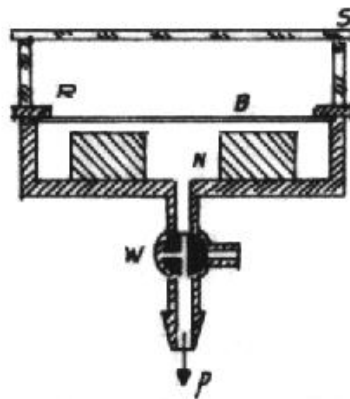
Licznik Geigera-Millera skonstruowany w 1928 roku ma postać zamkniętej rurki szklanej. Wewnątrz rurki znajduje się metalowy walec spełniający rolę katody K – Rys.74. Anodę A stanowi cienki drut naciągnięty wzdłuż osi licznika. Rurka wypełniona jest mieszaniną argonu i pary alkoholu pod ciśnieniem kilku cm Hg.

Gdy do licznika wpada cząstka jonizująca (cząstka α , β , promieniowanie rentgenowskie) to wytwarza ona na swojej drodze jony dodatnie i ujemne. Przyspieszane polem elektrycznym wytworzone są na skutek zderzeń dalsze jony. Przez licznik przepływa krótkotrwały prąd. Urządzenie liczy impulsy.



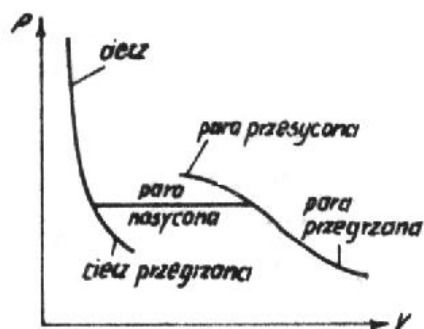
Rys.95. Schemat licznika Geigera-Millera.

Komora Wilsona – Rys.96. – opracowana została w latach 1911 – 1912. Składa się ze szklanego cylindra przykrytego od góry szybą szklaną. Wewnątrz naczynia R znajduje się nasycona para wody (lub alkoholu). Obszar R można połączyć z obszarem próżniowym.



Rys.96. Schemat komory Wilsona.

Nagły ruch tłoka powiększający objętość naczynia wywołuje adyabatyczne rozprężenie i wskutek tego oziębienie gazu. Wskutek braku zarodków jonów, na których para mogłaby się skroplić, przechodzi ona w parę przesyconą nie skraplając się. Jeżeli jednak cząstka naładowana znajduje się we wnętrzu komory Wilsona, natychmiast na niej kondensują się mikroskopijne krople wody z pary przesyconej – Rys.97.



Rys.97. Różne stany cieczy i pary.

Ten ślad po oświetleniu jest fotografowany. Komora jest zdatna do pracy przez okres 0.1 s. Po tym czasie komorę należy przygotować ponownie do pracy. Zwykle komorę Wilsona umieszcza się w silnym jednorodnym polu magnetycznym przez co naładowane cząstki są pod działaniem siły Lorentza zakrzywiającej tory tych cząstek.

Analiza ich torów umożliwia wyznaczenie np. ładunku, masy, energii i pędu cząstek.

Komory pęcherzykowe zostały skonstruowane w 1952 r. przez Glazera. Wypełnione są one ciekłym wodorem, propanem lub inną bardzo łatwo wrzącą cieczą o gęstości około tysiąca razy większej niż substancje wypełniające komory Willsona. Umożliwia to rejestrację cząstek o wielkich energiach przy czym rejestrowane są tory o tysiąc razy dłuższe niż tory fotografowane w komorach Wilsona. Ciśnienie i temperatura cieczy są tak dobrane, że ciecz znajduje się w stanie bliskim wrzenia. Nagła zmiana ciśnienia obniża punkt wrzenia cieczy przez co tworzą się pęcherzyki wokół jonów. Po ich oświetleniu tory cząstek są fotografowane przez dwa aparaty fotograficzne.

9.5. Własności przemian alfa, beta i gamma

Rozpad alfa

Większość jąder ciężkich ($Z \gg 84$, $A \geq 208$) rozpada się emitując cząstki α . Energię E cząstki α oraz energię Q_α (rozdział 9.3) można wyznaczyć z zasad zachowania pędu i energii. Niech spoczywające jądro o masie m_1 emituje cząstkę α (masę cząstki α oznaczamy przez m , prędkość przez v). Po emisji cząstki α pozostały fragment jądra o masie m_2 uzyskuje prędkość v_2 :

$$m_1 \cdot 0 + m_2 v_2 = mv$$

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = Q_\alpha$$

Po wyemitowaniu v_2 i zastąpieniu stosunku

$$\frac{m}{m_2} = \frac{A}{A-4}$$

mamy

$$Q_\alpha = \frac{A}{A-4} E_\alpha$$

gdzie

$$E_\alpha = \frac{1}{2} mv^2$$

Cząstki α są jądrami helu. Ich zasięg w danym środowisku jest stały. Charakterystyczną własnością cząstek α jest ich zdolność jonizacji atomów środowiska. Widmo energetyczne emitowanych cząstek jest widmem liniowym.

Świadczy to, że energia jądra atomowego jest skwantowana i może mieć tylko niektóre wartości energii. Energia cząstek α wylatujących z jąder uranu wynosi 4 MeV podczas gdy z doświadczenia Rutherforda dotyczącego rozproszenia cząstek α na jądrach uranu wynika, że cząstki te o energii 8.8 MeV są odpychane na odległościach 30 fermów (1 fermi = 10^{-15} m) od jąder uranu. Z tego wynika, że dół potencjału (bariera potencjału) jąder uranu jest znacznie wyższy niż energia opuszczających jądro cząstek α . Klasyczna fizyka nie umie wyjaśnić tego faktu. Nosi on nazwę efektu tunelowego i dopiero na gruncie mechaniki kwantowej znalazł wyjaśnienie.

Jeżeli przez I_1 oznaczamy natężenie fali de Broglie'a przechodzącej przez barierę potencjału, I_2 natężenie fali de Broglie'a podającej na barierę potencjału, to przezroczystość D bariery potencjału definiujemy

$$D = \frac{I_1}{I_2} .$$

W mechanice kwantowej dowodzi się, że w przypadku prostokątnej bariery potencjału

$$D = D_0 e^{-\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)}} ,$$

gdzie: D_0 jest wielkością stałą,

l jest szerokością,

U wysokością bariery,

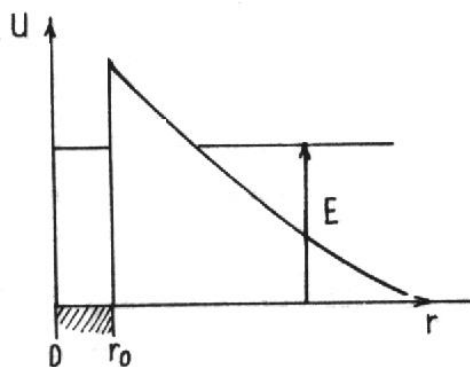
m – masą cząstki,

E – energia całkowita cząstki.

Przezroczystość bariery wiąże się z liczbą n uderzeń cząstki o ścianę bariery oraz stałą rozpadu λ (będącą prawdopodobieństwem rozpadu zależnością

$$\lambda = D \cdot n .$$

Wielkość ta jest różna od zera. Istnieje więc według mechaniki kwantowej niezerowe prawdopodobieństwo przeniknięcia cząstki o energii niższej niż wysokość bariery potencjału przez tę barierę – Rys.98.



Rys.98. Cząstka α przenika przez barierę potencjału.
 $0 \div r_0$ – obszar działania intensywnych sił jądrowych
 $0 \div r$ – obszar kulumbowskiego odpychania.

Rozpad beta

Rozpad beta (rozdział 9.3.) jądra radioaktywnego jest związany albo z emisją elektronu, albo z emisją pozytonu albo z wychwytem elektronu orbitalnego

Cząstki β są elektronami. Są one bardziej przenikliwe od cząstek α . Mogą przenikać przez blachy o grubości kilku milimetrów. Posiadają w odróżnieniu od cząstek α różne prędkości. Z uwagi na fakt, że jądra atomowe mają skwantowaną energię - skwantowane energie posiadają cząstki α i γ , a elektrony są wyrzucane z jądra (1), sądzono, że energie cząstek β również będą skwantowane. Okazało się jednak, że widmo energetyczne elektronów podczas rozpadów β jest ciągle. Według hipotezy Fermiego, rozpad β stanie się jasny, gdy przyjmie się istnienie nowej cząstki – neutrino. Cząstka ta o spinie $\frac{1}{2}\hbar$, zerowej masie spoczynkowej, zabierałaby część energii umożliwiając posiadanie przez elektron ciągłych wartości energii. Przyjmujemy również, że w rozpadzie β liczba nukleonów nie ulega zmianie. Konieczna jest więc przemiana w jądrze neutronu w proton (lub odwrotnie).

Rozpad β^- definiujemy jako przemiana neutronu w jądrze na proton. Przemiana ta połączona jest z emisją elektronu $\overline{\nu}_e$ oraz antyneutrino elektronowego ν_e .



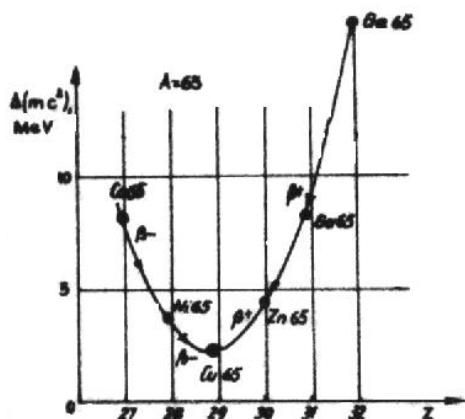
Przemiana ta zachodzi zarówno w przypadku neutronu związanego (w jądrze) jak i również w przypadku neutronu swobodnego. Neutron swobodny jest cząstką nietrwałą. Rozpada się według powyższego schematu po upływie około 10^3 s. Rozpad β^+ przebiega według poniższego schematu



W odróżnieniu jednak od rozpadu β^- , swobodny proton nie rozpada się. Jest cząstką trwałą. Przykład β^- oraz β^+ rozpadu jąder z liczbą masową $A = 65$ przedstawiono na Rys.99.

Dla cięższych jąder powłoka K i inne znajdują się blisko jądra. Może zaistnieć wówczas wychwyty orbitalnego elektronu połączone z emisją neutrino elektronowego według schematu



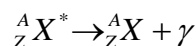


Rys.99. β^- - rozpad i β^+ rozpad jąder z liczbą masową $A = 65$.

Rozpad gamma

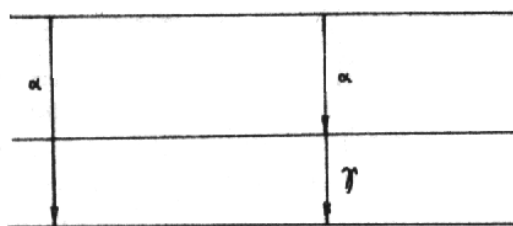
Rozpadom alfa i beta towarzyszy zwykle promieniowanie elektromagnetyczne, zwane promieniowaniem gamma.

Emisja promieniowania gamma jest jednym ze sposobów pozbycia się przez jądro nadmiaru energii, zwanej energią wzbudzenia. Rozpad gamma zapisuje się schematycznie



Gwiazdka * oznacza jądro wzbudzone. Zarówno jądro macierzyste jak i jądro pochodne ma taką samą strukturę nukleonową. Jeżeli E^* jest energią odpowiadającą stanowi wzbudzonemu oraz E odpowiada energii stanu podstawowego, to promieniowanie γ ma energię – Rys.100.

$$h\nu = E^* - E$$



Rys.100. Jądro pośrednie promieniuje kwant γ_0 energii równej różnicy między dwiema grupami cząstek α .

Promieniowanie γ jest promieniowaniem elektromagnetycznym o długości fali krótszej niż promieniowanie rentgenowskie. Promieniowanie to przechodząc przez materię wywołuje zjawisko fotoelektryczne, zjawisko Comptona i zjawisko kreacji par. Widmo promieniowania γ jest widmem liniowym.

9.6. Akceleratory liniowe i orbitalne

Podstawowymi narzędziami fizyki jądrowej oprócz opisanych w rozdziale 9.4 są akceleratory. Służą one do przyspieszania naładowanych cząstek. Strumień cząstek dużej energii uzyskany w akceleratorze skierowuje się na tarcze różnych substancji i bada procesy, jakie zachodzą przy zderzeniu tych cząstek z jądrami atomów tarczy.

Interesującymi zakresami energii cząstek przyspieszonych są zakresy od kilku do około 20 MeV, obszar ponad 200 MeV oraz obszar kilku GeV (w literaturze spotyka się również inne oznaczenie: BeV – bewatron). Pierwszy obszar wystarcza do wywołania i badania przebiegu reakcji jądrowych. Akceleratory tego typu służą do otrzymywania izotopów promieniotwórczych. W zderzeniach cząstek powyżej 200 MeV z jądrami powstają mezony π . Badanie właściwości mezonów π dostarcza cennych informacji o naturze sił jądrowych. Cząstki o jeszcze większej energii mają wielkie znaczenie w badaniach przebiegu zderzeń nukleonów, służą do otrzymywania ciężkich mezonów i hiperonów. Energie przekraczające 5.6 GeV powodują, iż można zaobserwować zjawisko kreacji par nukleonu: protonu i antyprotonu, neutronu i antyneutronu.

Te duże energie zastosowane do ciężkich jonów umożliwiają otrzymywanie pierwiastków leżących za uranem – transuranów. W reakcjach jądrowych z ciężkimi jonami otrzymano w ciągu kilku ostatnich lat pierwiastki do numeru 104.

Akceleratory elektronów stosuje się do wytworzenia przenikliwych promieni rentgenowskich. Wytwarzanie promieni rentgenowskich w wielkich akceleratorach elektronów pozwala śledzić bardzo ciekawe procesy towarzyszące oddziaływaniu promieniowania elektromagnetycznego wielkiej energii z materią.

Znane obecnie akceleratory można podzielić na trzy grupy:

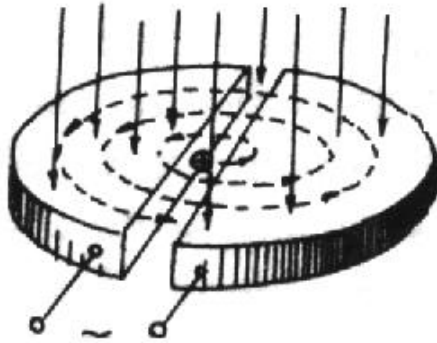
1. Akceleratory z generatorami stałego, wysokiego napięcia,
2. Akceleratory cykliczne.
3. Akceleratory liniowe.

Do pierwszej grupy należą takie akceleratory jak generator van de Graffa i generator kaskadowy. Generatory wytwarzają wysokie napięcie, które przykłada się do układu elektrod umieszczonych w prostoliniowej rurce akceleracyjnej. Cząstki biegnące wzdłuż rury przebywają różnicę potencjałów między elektrodami i uzyskują energię odpowiadającą napięciu wytworzonymu przez generator. Akceleratory pierwszego typu pozwalają uzyskać energię rzędu kilku MeV.

Do drugiej grupy zaliczamy akceleratory ciężkich cząstek: cyklotrony, synchrociklotrony (fazotrony), synchrotrony protonów (synchrofazotrony), akcelerator elektronów: batatrony, mikrotron, synchrotrony elektronowe.

Do trzeciej grupy zaliczamy akcelerator liniowy elektronów i protonów.

W każdym akceleratorze można wyróżnić: źródło jonów (elektronów), układ przyspieszający oraz urządzenie pozwalające skierować strumień przyspieszonych cząstek na tarczę. Pierwszy cykliczny akcelerator (cyklotron), został skonstruowany w 1930 r. przez E. Lawrence'a. schemat tego urządzenia przedstawia Rys.101.



Rys.101. Schemat cyklotronu.

W komorze próżniowej umieszczone są dwie połowki walca (tzw. duanty). Są one zasilane z generatora napięcia o wysokiej częstotliwości. Różnica potencjałów wynosi kilka tysięcy wolt. W celu zapewnienia ruchu obrotowego cząstek przyspieszonych, umieszcza się komorę próżniową między biegunami silnego elektromagnesu.

Zasada działania cyklotronu jest następująca. Dodatni jon o ładunku Q , który znalazł się w szczelinie między duantami, uzyskuje energię kinetyczną

$$E_1 = \frac{p_1^2}{2m} = Q\varphi$$

gdzie: φ oznacza różnicę potencjałów między duantami.

Uzyskany pęd podczas jednorazowego działania pola wynosi

$$p_1 = \sqrt{2mQ\varphi}$$

Promień koła, po którym porusza się jon pod wpływem pola magnetycznego wynosi

$$r_1 = \frac{p_1}{QB} = \sqrt{\frac{m}{Q}} \frac{\sqrt{2\varphi}}{B}$$

Jeśli w momencie, w którym jon ponownie znajdzie się w szczelinie między duantami, pole elektryczne zmieni swą biegunowość, to jon uzyska dodatnią porcję energii. Energia kinetyczna i pęd wynoszą teraz

$$E_2 = 2Q\varphi,$$

$$p_2 = \sqrt{4mQ\varphi},$$

oraz

$$r_2 = \sqrt{\frac{m}{Q}} \frac{\sqrt{4\varphi}}{B}.$$

Po wykonaniu n okrążeń, jon przejdzie $2n$ razy przez przyspieszające pole, więc

$$E = 2nQ\varphi$$

oraz

$$r = \frac{mv_{\max}}{QB} = \frac{\sqrt{2mE}}{QB}$$

Aby jon był bez przerwy przyspieszony, musi znajdować się między duantami, w których pole elektryczne zmienia swoją biegunowość. Warunek synchronizacji będzie spełniony, gdy okres zmian biegunowości przyspieszającego pola elektrycznego będzie się pokrywać z okresem obiegu jonu.

$$T_{\text{pola}} = T_{\text{jonu}} = \frac{2\pi m}{QB} = \frac{2\pi}{\omega},$$

gdzie: ω jest częstotliwością obiegu cząstki.

Na zewnętrznym obwodzie cyklotronu, cząstka ma prędkość

$$v_{\max} = \frac{BQr}{m}$$

oraz energię

$$E_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{m}{2}(\omega R)^2.$$

Z powyższego rezultatu wynika, że maksymalna energia jest proporcjonalna do R^2 .

Uzyskanie olbrzymich energii pociąga za sobą budowę olbrzymich przyrządów. Przykładowo, największy akcelerator liniowy elektronów o energii 20 GeV znajduje się w Stanford i ma długość (wraz z halami pomiarowymi) ponad 3,5 km, średnica toru cząstek w synchrotronie protonowym znajdującym się w Brookhaven ma średnicę 257 m, synchrofazotron Instytutu Fizyki Wielkich Energii w Sierpuchowie o energii 76 GeV ma średnicę 236 m. Masy elektromagnesów są też olbrzymie : synchrotron protonowy w Dubnej ma masę 36000000 kg

Synchronizacja między częstotliwością obiegu cząstki a częstotliwością zmian napięcia między duantami w miarę jak jon porusza się z coraz większą prędkością psuje się. Staje się to za przyczyną relatywistycznej zmiany masy m . Ze wzrostem masy, wzrasta okres obiegu cząstek

$$T = \frac{2\pi m}{QB} = \frac{2\pi}{QB} \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

przy czym okres obiegu cząstki zmienia się wyraźnie, gdy energia kinetyczna cząstki staje się porównywalna z jej energią spoczynkową.

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2m}{QB} \frac{QB}{2\pi m_0} = \frac{mc^2}{m_0c^2} = \frac{E}{E_0} = \frac{E_0 + E_k}{E_0} = 1 + \frac{E_k}{E_0},$$

stąd

$$T = T_0 \left(1 + \frac{E_k}{E_0}\right).$$

Jednakże nie ma granic (poza wydajnością magnesu) w osiągnięciu dowolnych energii, jeżeli wraz ze wzrostem masy relatywistycznej cząstek będzie rósł okres T przyłożonego zmiennego napięcia. Typ cyklotronu, w którym przy przyspieszeniu cząstek zmienia się okres T , nazywamy synchrociklotronem.

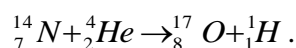
Jeżeli proporcjonalnie do pędu cząstek będzie rosło natężenie pola magnetycznego (magnes znajduje się wokół toru przyspieszanych cząstek), wówczas (zgodnie ze wzorem 94 rozdział IV) nie zmienia się promień ich orbit kołowych.

Akceleratory tego typu nazywamy synchrotronami. Przykładowo synchrotron w Brookhaven zbudowany w 1952 r. ma średnicę 225 m i może nadawać protonom energię rzędu 2,2 GeV a zbudowany w 1971 r. synchrotron protonowy znajdujący się w National Accelerator Laboratory w Weston (USA) nadaje protonom energię rzędu 500 GeV. Inne akceleratory, obecnie w studium projektowania, będą przyspieszać cząstki do energii większej niż 1000 GeV.

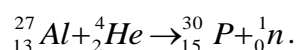
Stosowanie akceleratorów nie tylko do badań naukowych, lecz i do celów technicznych oraz medycznych jest motorem ich udoskonalania.

9.7. Promieniotwórczość sztuczna

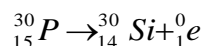
Pierwszą reakcją jądrową podczas której jeden pierwiastek chemiczny przekształcił się w drugi była reakcja



Aby ta reakcja mogła zajść, konieczne było „czołowe” trafienie cząstki α w jądro azotu. Inną historyczną przemianą była reakcja przekształcająca glin w krzem (I. i F. Joliot-Curie – 1933 r.).

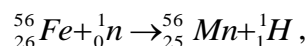


Jednakże ponieważ izotop fosforu ${}^{30}_{15}P$ jest pierwiastkiem promieniotwórczym, o czasie połowicznego rozpadu 2,5 min, to rozpada się według schematu:

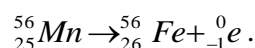


Cząstkę α można wykorzystać do bombardowania jedynie jąder lekkich (o małym Z). Wynika to z faktu, że bariera kulombowska cząstki α bardzo wysoka. W 1934 r. Fermi zaproponował ostrzeliwanie pierwiastków neutronami. Cząstki te nie mają ładunku elektrycznego i dzięki temu z łatwością dostają się do wnętrza ostrzeliwanych jąder.

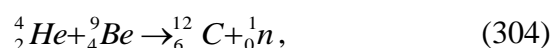
Przykładem takiej reakcji jest



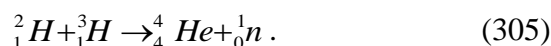
przy czym mangan promieniotwórczy rozpada się według schematu (czas połowicznego rozpadu 2,6 godz.).



Neutron może być stosowany jako cząstka bombardująca w wielu eksperymentach. Źródłem neutronów jest rad, który jest emitorem cząstek α jeśli jest zmieszany z berylem, to cząstki α wybijają z berylu neutrony zgodnie z reakcją

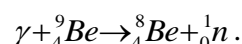


Aby uzyskać ścisłą informację o energii emitowanych neutronów stosuje się bombardowanie deuteronów o dużej prędkości tarczą trytu:



Ponieważ w tej reakcji neutron jest lżejszy od cząstki α , będzie on wnosił w postaci energii kinetycznej większość energii wyzwolonej w tej reakcji. Maksymalna energia wnoszona przez neutrony w tej reakcji wynosi 17.6 MeV i zmniejsza się w zależności od kąta, pod którym emitowane są neutrony względem kierunku cząstek padających.

Reakcja fotorozszczepiania jest kolejnym sposobem wytwarzania neutronów. Przykładem takiej reakcji jest oddziaływanie kwantów γ z jądrami

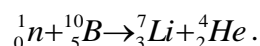


Do wywołania tej reakcji (reakcja endoenergetyczna) potrzebna jest energia z zewnątrz (1.67 MeV), ponieważ masa „wyjściowa” jest większa od masy „wejściowej”.

Neutrony o bardzo wysokich energiach można wytworzyć wykorzystując zderzenia wysokoenergetycznych deuteronów z tarczą (reakcja strippingu). Energia wiązania neutronu w deuteronie wynosi 2.2 MeV. Podczas zderzenia deuteronów o energii rzędu kilkuset MeV z jądrami tarczy, neutrony łatwo oddzielają się unosząc (w przybliżeniu) energię równą połowie energii padających deuteronów. Wydajność powyższych reakcji jest różna. Na przykład reakcja typu (α, n) – (304), gdzie α oznacza cząstkę bombardującą, n oznacza cząstkę emitującą neutron, charakteryzuje się wydajnością 10^2 neutronów na sekundę w stosunku do określonej substancji promieniotwórczej, reakcja typu (dn) – (355, d – deuter) – 10^4 neutronów na sekundę, a w nowoczesnych generatorach neutronów osiąga się wydajność rzędu 10^{12} neutronów na sekundę.

Najwydatniejszym źródłem neutronów są reaktory jądrowe (10^{16} neutronów na sekundę). Są to urządzenia w których można wytworzyć reakcję łańcuchową w sposób kontrolowany.

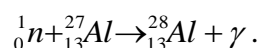
Do detekcji neutronów nie możemy stosować przyrządów opisanych w paragrafie 9.4. Spowodowane jest to tym, że neutrony nie powodują fluorescencji, nie tworzą śladów w komorach mgłowych czy też w emulsjach ani nie wywołują impulsów w licznikach Geigera-Müllera. Neutrony nie odchylają się w polu elektrycznym lub magnetycznym (neutron posiada ładunek obojętny) ani nie mogą wywoływać jonizacji. Z tych powodów należało opracować specjalne metody rejestracji neutronów. Do nich należy np. detekcja jonizacji cząstki naładowanej w reakcji, w której pociskami są neutrony



Cząstki ${}^4_2\text{He}$ rejestrowane w komorze jonizacyjnej pośrednio wskazują obecność neutronów.

Innym sposobem pośredniego stwierdzenia obecności neutronów (w procesie sprężystego zderzenia czołowego neutronu z protonem) jest rejestracja jonizacji w komorze jonizacyjnej wywołana przez protony.

Obecność neutronu może być również stwierdzona w procesie radiacyjnego wychwytu neutronu:



W procesie tym powolny neutron oddziałując z jądrem może być zaobserwowany, a emisja kwantu γ pośrednio wskazuje na obecność neutronów.

Omawiane w tym paragrafie oraz w poprzednim, oddziaływania przebiegają z określonym prawdopodobieństwem. Miarą prawdopodobieństwa wystąpienia danej reakcji jest przekrój czynny. Efektywny przekrój czynny na reakcję jądrową jest określany polem powierzchni tarczy otaczającej jądro, z którą jeśli cząstka bombardująca zderzy się, to wywoła daną reakcję. Reakcja będzie zachodziła, jeżeli cząstka bombardująca przejdzie przez tę powierzchnię, natomiast w przeciwnym przypadku reakcja nie nastąpi.

Aby wyznaczyć przekrój czynny na reakcję rozpatrzmy wycinek tarczy o grubości d i o powierzchni S . Jeśli n jest liczbą jąder tarczy w jednostce objętości, to liczba jąder w wycinku tarczy jest równa nSd .

Jeżeli więc σ jest przekrojem czynnym każdego jądra, czyli powierzchnią jego oddziaływania (każdego jądra), to całkowita powierzchnia podlegająca oddziaływaniu wynosi $n\sigma Sd$.

Prawdopodobieństwo wystąpienia reakcji jest więc równe

$$p = \frac{n\sigma Sd}{N_0} = n\sigma d = \frac{N}{N_0},$$

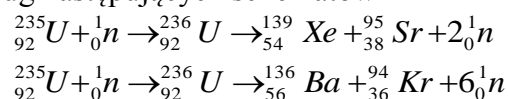
gdzie: n jest liczbą cząstek przepuszczonych po wzięciu udziału w reakcji,

N_0 jest całkowitą liczbą padających cząstek na tarczę w ciągu sekundy.

σ nosi nazwę mikroskopowego (lub różniczkowego) przekroju czynnego na określony rodzaj oddziaływania. Jednostką mikroskopowego przekroju czynnego jest 1 barn = 10^{-28}m^2 .

9.8. Rozszczepianie i synteza jąder

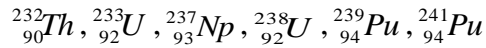
Bombardowanie neutronami (również przez kwanty γ , cząstki α , protony i inne cząstki naładowane) ciężkich jąder wywołuje ich rozpad na dwa jądra lżejsze. Typ rozpadu, w którym ciężkie jądro zamienia się na jądra lżejsze, zwane fragmentami, nazywamy rozszczepieniem. Przykładem reakcji rozszczepienia może być rozszczepienie uranu ${}_{92}^{235}\text{U}$ przebiegające na przykład według następujących schematów



Podziałowi uranu na dwa fragmenty towarzyszy wydzielanie się olbrzymiej energii. Jest to spowodowane tym, że energia wiązania przypadająca na jeden nukleon dla pierwiastków środkowej części tablicy Mendelejewa wynosi około 8.7 MeV, a dla jąder ciężkich 7.6 MeV. Różnica 1.1 MeV pomnożona przez 235 nukleonów uranu daje energię rzędu 200 MeV wyzwoloną podczas rozpadu. Przykładowo z 1 grama uranu ${}_{92}^{235}\text{U}$ podczas rozszczepiania wydziela się około 22000 kWh energii.

Jądra uranu ${}^{235}\text{U}$ ulegają rozszczepieniu zarówno pod wpływem szybkich jak i powolnych neutronów, natomiast jądra ${}^{238}\text{U}$ jedynie wskutek oddziaływania z szybkimi neutronami.

Rozszczepieniu pod wpływem neutronów ulegają również jądra innych ciężkich pierwiastków. Największe praktyczne znaczenie mają reakcje rozszczepiania

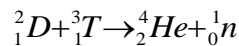


Materiały te są obecnie paliwem jądrowym we współczesnych reaktorach. Jądra fragmentów rozszczepiania są promieniotwórcze i przechodząc do stanu podstawowego emitują neutrony, elektrony i fotony γ . Neutrony te są emitowane przez jądra – fragmenty w ciągu kilkudziesięciu sekund po rozszczepieniu jądra. Nazywamy je powolnymi w odróżnieniu od neutronów szybkich powstałych w akcie rozszczepiania w czasie rzędu 10^{-12}s .

Jeżeli neutrony powstałe podczas reakcji rozszczepiania będą oddziaływać z sąsiednimi jądrami i spowodują kolejną reakcję podziału, to tego typu reakcja nosi nazwę łańcuchowej.

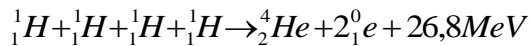
Dla danego ciała rozszczepiającego, ilość produkowanych neutronów w kolejnych aktach podziału wyrażona tzw. współczynnikiem rozmnażania neutronów zależy od masy ciała i jego kształtu. przykładowo każda ilość czystego ${}_{92}^{238}\text{U}$ jest w tzw. stanie podkrytycznym, tzn. reakcje łańcuchowe nie mogą się rozwijać, ale już masa 1 kg ${}_{92}^{235}\text{U}$ stanowi masę nadkrytyczną. Jeżeli spowodujemy połączenie dwóch mas podkrytycznych ${}_{92}^{235}\text{U}$ w jedną całość o masie nadkrytycznej, wówczas w czasie 1s wydzieli się z 1 kg uranu energia ponad $20 \cdot 10^6$ kWh (bomba atomowa), a temperatura która powstaje podczas wybuchu wynosi około 10^7K . Temperatura ta może zainicjować odwrotny proces rozszczepiania jąder ciężkich a mianowicie, syntezę jąder lekkich.

Przykładowo synteza deuteru i trytu w jądro helu



powoduje wydzielanie się 17,6 MeV energii. Jest to prawie 4 razy więcej (17,6 MeV/5 nukleonów = 3,5 MeV/nukleon) niż otrzymujemy w reakcji rozszczepiania uranu ${}_{92}^{235}\text{U}$ (200 MeV/23 nukleony = 0,85 MeV/nukleon).

Jeszcze bardziej wydajną reakcją jest synteza



czyli na jedną cząstkę przypada

$$\frac{12,8\text{MeV}}{4 \text{ nukleony}} = 6,7\text{MeV} / \text{nukleon}$$

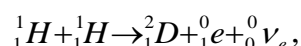
Ze względu na wzajemne odpychanie kulombowskie jąder biorących udział w syntezie, reakcje te mogą zachodzić jedynie przy odpowiednio dużej energii kinetycznej (np. na skutek ruchu cieplnego tych jąder).

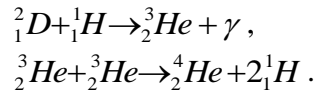
Temperatura odpowiadająca żądanej energii cząstek wynosi około 10^8 - 10^{10}K . W takiej temperaturze wszystkie cząsteczki ulegają jonizacji tworząc mieszaninę jonów z elektronami czyli plazmę.

Reakcje jądrowe zachodzące w plazmie o wysokiej temperaturze noszą nazwę reakcji termojądrowych.

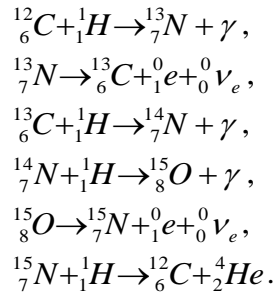
Obecnie uważamy, że za produkcję energii wypromieniowanej przez gwiazdy odpowiedzialne są reakcje termojądrowe. H.Bethe zaproponował, że cykl H-H odgrywa zasadniczą rolę w produkcji energii „zimniejszych” gwiazd.

Cykl protonowo- protonowy





Dla gwiazd gorętszych, większy udział w produkcji energii ma cykl C-N. Cykl węglowo-azotowy



W powyższym cyklu węgiel i azot są katalizatorami reakcji. Końcowym rezultatem obu cykli jest przemiana czterech protonów w jądro helu. Niedobór masy tej reakcji wynosi

$$\text{masa } 4{}^1_1\text{H} = 4 \cdot 1.0075975 = 4.0303900 \text{ u}$$

$$\text{masa } {}^4_2\text{He} = \frac{4.002604 \text{ u}}{\Delta m = 0.027786 \text{ u}} -$$

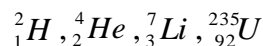
stąd wydzielona energia wynosi

$$Q_w = \Delta m \cdot 931.5 \text{ MeV} = 26.1 \text{ MeV}.$$

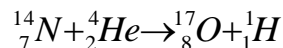
9.9. Zadania do rozdziału 9

9.9.1. Jakiej zmianie energii odpowiada 1 u?

9.9.2. Określić energię wiązania jąder następujących pierwiastków:



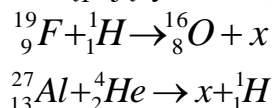
9.9.3. Czy reakcja

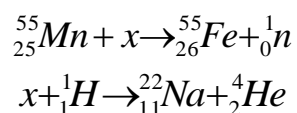


przebiegała z wydzielaniem, czy z pobieraniem energii?

9.9.4. Podczas bombardowania jądra żelaza ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ neutronami tworzy się β - radioaktywny izotop manganu o masie atomowej 56. Napisać równanie reakcji powstawania radioaktywnego manganu i reakcję β - rozpadu.

9.9.5. Wpisać brakujące wielkości w następujących reakcjach jądrowych:





9.9.6. Na skutek rozpadu radioaktywnego ${}_{92}^{238}\text{U}$ przekształca się w ołów ${}_{82}^{206}\text{Pb}$. Ile zaszło rozpadów α i β ?

9.9.7. Zmiany w czasie masy izotopu promieniotwórczego ${}_{20}^{45}\text{Ca}$ scharakteryzowane są tabelką. Wyznaczyć graficznie okres połowicznego rozpadu.

Czas obserwacji (doby)	Masa substancji (gramy)
0	1.0000
20	0.9126
40	0.8398
60	0.7704
80	0.7112
100	0.6500

9.9.8. Dla pewnego preparatu promieniotwórczego zmierzono prędkość rozpadu promieniotwórczego dla różnych czasów.

Czas obserwacji (doby)	Masa substancji (gramy)
0	$5.3 \cdot 10^{11}$
10	$4.6 \cdot 10^{11}$
20	$4.0 \cdot 10^{11}$
30	$3.5 \cdot 10^{11}$
40	$3.0 \cdot 10^{11}$
50	$2.5 \cdot 10^{11}$

Wyznaczyć metodą graficzną, na podstawie powyższych danych, okres połowicznego rozpadu badanego preparatu.

9.9.9. Okres połowicznego zaniku radu wynosi $T = 1622$ lata. Ile potrzeba czasu, aby 5% radu uległo rozpadowi?

10. ODPOWIEDZI DO ZADAŃ

$$1.9.1. 15.15 - 3.25 \frac{0.065}{\sqrt{9}} < m < 15.15 + 3.25 \frac{0.065}{\sqrt{9}}$$

$$1.9.2. 19.8 - 1.96 \frac{6.6}{\sqrt{150}} < m < 19.8 + 1.96 \frac{6.6}{\sqrt{150}}$$

$$1.9.3. \bar{x} = 9.783$$

$$s = 0.15$$

$$m_0 = 9.800$$

$$n = 64$$

$$|u_{0.05}| = 1.96, |u| = 0.9, |u| < |u_{0.05}|, \text{ nie ma więc podstaw}$$

do odrzucenia hipotezy, że wartość przyspieszenia ziemskiego w miejscu obserwacji wynosi 9.800.

$$1.9.4. \bar{x}_1 = 11.6$$

$$\bar{x}_2 = 11.8$$

$$\alpha = 0.01$$

$$s_1 = 2.898$$

$$s_2 = 2.494$$

$$|t_\alpha| = 2.90$$

$$n_1 = 10$$

$$n_2 = 9$$

$$k = n_1 + n_2 - 2 \text{ stopni swobody}$$

$|t| = 1.32$, nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o jednakowych wskazaniach pomiaru obu woltomierzami.

$$1.9.5. n = \frac{(2.23)^2 \cdot 0.09}{(0.1)^2} = 44.7 \approx 45 \text{ pomiarów}$$

$$1.9.6. \bar{v}_h = 37.5 \text{ km/h} \quad (\text{pierwszy autobus}), \quad \bar{v} = 40 \text{ km/h} \quad (\text{drugi autobus})$$

$$1.9.7. |5.22 - 4.5| < (0.7 + 0.04). \text{ Wyniki obu pomiarów są zgodne}$$

$$1.9.8. |10.04 - 9.81334| < (0.23 + 0.00010). \text{ Wyniki obu pomiarów są zgodne.}$$

$$1.9.9. r = 0.993; \quad y - 300 = 0.993 \frac{11.87}{400} (x - 800), \quad \text{stąd} \quad y = 0.03x + 276.43$$

$$\text{Dla } x = 500m, \quad y = 291.4K$$

$$1.9.10. T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \text{ stąd} \quad l = \frac{gT^2}{4\pi^2}, \quad l = 0.245m$$

Metoda różniczki zupełnej

$$\Delta l = \left| \frac{\partial l}{\partial g} \right| \Delta g + \left| \frac{\partial l}{\partial T} \right| \Delta T \quad \Delta l = \left| \frac{T^2}{4\pi^2} \right| \Delta g + \left| \frac{2gT}{4\pi^2} \right| \Delta T$$

$$\frac{\Delta l}{l} \cdot 100\% = 2.01\%, \quad \Delta l = 0.005m$$

Metoda pochodnej logarytmicznej

$$\ln l = \ln g + 2 \ln T - \ln 4 - 2 \ln \pi,$$

po zróżniczkowaniu (wartość π przyjmujemy za bezbłędną)

$$\frac{dl}{l} = \frac{dg}{g} + 2 \frac{dT}{T}, \quad \text{stąd} \quad \left| \frac{\Delta l}{l} \right| = \left| \frac{\Delta g}{g} \right| + 2 \left| \frac{\Delta T}{T} \right|$$

$$1.9.11. \quad \rho = \frac{m}{V}, \quad \rho = 2.7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \quad \frac{\Delta \rho}{\rho} \cdot 100\% = 0.38\% \quad \Delta \rho = 0.01 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$1.9.12. \text{ Połączenie szeregowo: } R = R_1 + R_2, \quad R = 30\Omega, \quad \Delta R = 0,2\Omega$$

$$\frac{\Delta R}{R} \cdot 100\% = 0.67\%$$

$$\text{Połączenie równoległe: } R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad R = 6.67\Omega \quad \frac{\Delta R}{R} \cdot 100\% = 0.67\%,$$

$$\Delta R = 0.055\Omega$$

$$2.4.1. \quad \rho_z = 5503 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad \rho_s = 1410 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$2.4.2. \quad \rho_p = 11833 \cdot 10^{13} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad \rho_H = 2696 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$2.4.3. \quad \rho = 2038 \cdot 10^{27} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$2.4.4. \quad \rho = 2389 \cdot 10^{-28} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad \text{około } 24 \text{ nukleonów/m}^3$$

$$2.4.5. \quad \rho = 9554 \cdot 10^{-26} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad 1 \text{ gwiazda przypada średnio na } 342.25 \text{ pc}^3$$

$$2.4.6. \quad a \approx 3.1 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

$$2.4.7. \quad \Delta v \geq \frac{h}{m \Delta x}, \quad \Delta v \geq 725 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$2.4.8. \quad v \geq 6.6 \cdot 10^{-27} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2.4.9. 241.5 m_e

2.4.10. $\Delta x \geq 0.7 \cdot 10^{-11} m$

$$3.4.1. \quad \vec{v}_{sr} = \frac{\vec{v}_1 t_1 + \vec{v}_2 t_2}{t} = \frac{\vec{v}_1 \frac{\Delta \vec{r}_1}{v_1} + \vec{v}_2 \frac{\Delta \vec{r}_2}{v_2}}{\frac{\Delta \vec{r}_1}{v_1} + \frac{\Delta \vec{r}_2}{v_2}}$$

$$\vec{v}_x = \frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = 0$$

$$\vec{v}_y = \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{20}{3} \sqrt{2}$$

$$3.4.2. \quad v_{wyp.} = \sqrt{v^2 + u^2 + 2uv \cos \alpha} = 3,6 \frac{m}{s}$$

$$\beta = 46^\circ 12'$$

$$\sin \beta = \frac{v \sin \alpha}{v_{wyp.}}$$

$$3.4.3. \quad x = \frac{v_2 s}{v_1} = 100 m$$

3.4.4. Odległość między samochodami po upływie czasu t wynosi

$$s = \sqrt{(s_1 - v_1 t)^2 + (s_2 - v_2 t)^2}$$

$$t = \frac{s_1 v_1 + s_2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}, \quad \text{stąd } t = 0,9 h$$

$$v_{min} = \frac{ds}{dt} = 0 \text{ dla}$$

$$3.4.5. \quad v_I = \sqrt{G \frac{M}{R}}; 1,67 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$$

$$3.4.6. \quad \text{a) } t = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}; \quad t = 7 s$$

$$t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}; \quad t = 2,9 s$$

b)

Prędkość w obu

przypadkach będzie jednakowa i wynosi $v = 48,4 \frac{m}{s}$

$$3.4.8. \quad g_K = g_Z \frac{M_K R_Z^2}{M_Z R_K^2}, \quad g_K = 1.47 \text{ms}^{-2}$$

$$3.4.9. \text{ a) } a = \frac{v^2 - v_0^2}{2x}, \quad a = -2 \text{ms}^{-2} \quad \text{b) } t = \frac{2x}{v + v_0}, \quad t = 5 \text{s}$$

$$3.4.10. \quad y = \frac{g}{2v^2} x^2, \quad v_k = \sqrt{v^2 + 2gh} = 24.69 \text{ms}^{-1} \quad \cos \alpha = \frac{v}{v_k},$$

$$\alpha = 52^\circ 44'$$

$$3.4.11. \quad v = \frac{s}{2h} \sqrt{2gh}, \quad v = 210 \text{ms}^{-1}$$

$$3.4.12. \quad N = \frac{nt}{2} = 300 \text{ obrotów}$$

$$3.4.13. \quad h = \frac{5}{2} r, \quad h = 25 \text{m}$$

$$3.4.14. \quad \text{Minimalna liczba obrotów wynosi } n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{R}}, \quad n = 30 \text{ (obrotów/minutę)}$$

$$3.4.15. \quad w = \frac{4n\pi}{t} = 40\pi \cdot \frac{1}{s} = 20 \frac{\text{obrotów}}{s}$$

$$3.4.16. \quad E_p = \frac{mv_0^2 \sin^2 \alpha}{2}, \quad E_p = 15 \text{J}, \quad v_0 = 34.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad h = 15,3 \text{m}$$

$$3.4.17. \quad v_0 = \frac{s}{\tau \cos \alpha} = 21.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \tau = \sqrt{\frac{2(h + s \operatorname{tg} \alpha)}{g}} = 3.29 \text{s}$$

$$H = h + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 14.8 \text{m}. \quad \text{W punkcie najwyższym}$$

$$r = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = 23.6 \text{m}. \quad \text{W punkcie upadku}$$

$$r = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^3}{v_x g} = 54.5 \text{m}, \quad \text{gdzie } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 20.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$3.4.18. \quad 940 \text{ km}$$

3.4.19. a) $t = 16.7 \mu s$ oraz $t = 2.33 \mu s$ b) 0.7 km

3.4.20.
$$u = \frac{c+v}{1+\frac{cv}{c^2}} = \frac{c+v}{c+v} c = c$$

3.21 1,8 razy, nie ,

4.4.1. Siła ciągu $F = m\left(g + \frac{2h}{t^2}\right)$, $F = 54.2 \cdot 10^6 N$ $v = \frac{2h}{t}$,
 $v = 666.7 \frac{m}{s}$ Przeciężenie $= \frac{m'(g+a)}{m'g} = 1 + \frac{a}{g} = 1 + \frac{2h}{t^2 g} = 5,5$

4.4.2. $F = \frac{m\sqrt{2gh}}{t}$, $F = 1150217 N$
 $F' = -\frac{m(\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh})}{t}$ gdzie $h_1 = 50 cm$, stąd $F' = 1619774 N$.

Siła ta jest większa niż w pierwszym przypadku.

4.4.3. $a = \frac{gM}{m+M}$

4.4.4. $a = \frac{gm}{m+2M} = 7.35 \frac{m}{s^2}$, $T = Mg \frac{2(M+m)}{2M+m} = 1.68 N$ $F = 2T$

4.4.5. Gdy winda rusza w dół: $F = m(g-a) = 0$

$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g-a}} = \infty$ Gdy winda rusza do góry:
 $F = m(g+a) = 19.6 N$
 $T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g+a}} = 1.42 s$

4.4.6. a) $\frac{P_b}{P_r} = 1.0035$ b)

$\frac{P_b}{P_r} = \frac{g_b}{g_r} = 1.0053$

4.4.7. $R = 4.23 \cdot 10^7 m$, $v = 3.08 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$

4.4.8. $h = 82400 \text{ km}$

4.4.9. $\frac{4\pi^2}{T^2} R M_Z = G \frac{M_Z M_S}{R^2}$ stąd $M_S = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

4.4.10. $g_1 = g \frac{d}{D}$ stąd $g_1 = 0.023 \frac{m}{s^2}$

4.4.11. $\frac{v_Z}{v_W} = \sqrt{\frac{R_W}{R_Z}} = 0.85$

4.4.12. $a = \frac{u\mu}{m_0 - \mu t} - g$, $a = 140.2 \frac{m}{s^2}$, $\mu = 5 \frac{kg}{s}$

4.4.13. $v = u \left(1 - e^{-\frac{\mu t}{m}} \right)$, $v = 1.9 \frac{m}{s}$

4.4.14. $\frac{m_0}{m} = 10$

4.4.15. $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 0.59 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

4.4.16. $r = \frac{2E}{Hev} = 0.006 m$

4.4.17. $\frac{Q}{m} = \frac{2Uy^2}{B^2 l^2 \left(d + \frac{l}{2} \right)} = 1.7 \cdot 10^9 \frac{As}{kg}$, $d + l = 2.5 m$ $l = 0.5 m$.

Cząsteczka ta jest elektronem

4.4.18. $\frac{Q}{m} = \frac{v}{Br} = 9.6 \cdot 10^7 \frac{C}{kg}$

$m = 6.62 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

4.4.19. $p = 2\rho v \omega_0 b \sin \varphi = 37.4 \frac{N}{m^2}$, gdzie ρ = gęstość wody, ω_0 = prędkość
kątowna obrotu Ziemi

$$4.4.20. \quad v = \frac{F}{2\omega_0 \rho \sin \varphi} = 1.6 \frac{m}{s}$$

$$4.4.21. \quad a_c = 2\omega v \sin \varphi = 2.17 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s^2}$$

$$5.10.1. \quad W = mg \left(H + \frac{s^2}{16H} \right)$$

$$5.10.2. \quad E_k = \frac{m}{2} (v^2 + g^2 t^2 - 2vgt \sin \alpha)$$

$$5.10.3. \quad v = \frac{2m_2 E}{m_1 m_2 + m_1^2} = 0.66 \cdot 10^7 \frac{m}{s}, \text{ gdzie } m_1 \text{ i } m_2 \text{ oznaczają masy atomów Ba i Kr.}$$

$$5.10.4. \quad v_3 = -\frac{3m}{M-3m} v, \quad v_3 = -2 \frac{m}{s}$$

$$5.10.5. \quad B = \frac{E_0 \sqrt{2\eta}}{ecr} = 6804 \cdot 10^{-5} \frac{Wb}{m} = 0.068 Ts = 680 Gs \quad \eta = \frac{E_k}{E_0},$$

$$E_k = eU, \quad \frac{E_0}{e} = 938.23 MeV$$

$$5.10.6. \quad E_k = \sqrt{B^2 e^2 r^2 c^2 + (m_0 c^2)^2} - m_0 c^2 \text{ dżuli} = 5.51 MeV$$

$$5.10.7. \quad \Delta E = -263 \cdot 10^9 \frac{kg}{\text{min}}$$

$$5.10.8. \quad 8.987 \cdot 10^{13} J = 5.61 \cdot 10^{26} MeV = 2.147 \cdot 10^{13} cal = 2.497 \cdot 10^7 kWh$$

$$5.10.9. \quad 1 u = 1.49 \cdot 10^{-11} J = 931.478 MeV$$

$$1 kg = 9.02 \cdot 10^{16} J = 5.63 \cdot 10^{29} MeV$$

$$5.10.10. \quad 1 J = 0.67 \cdot 10^{11} u = 1.11 \cdot 10^{-16} kg$$

$$1 eV = 1.07 \cdot 10^{-9} u = 1.78 \cdot 10^{-36} kg$$

$$1 MeV = 1.07 \cdot 10^{-3} u = 1.78 \cdot 10^{-30} kg$$

$$5.10.11. \quad 635.3 Hz, \quad 564.7 Hz$$

$$5.10.12. \quad 110.2 \frac{km}{h}$$

$$5.10.13. \quad v = 260 \frac{m}{s}, \quad \theta = 60^\circ$$

$$5.10.14. \quad E = \frac{m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = 45 J. \text{ Energia ta jest zużyta na deformacje kul i ich ogrzanie}$$

$$5.10.15. \quad v_1' = \frac{2m_1 v_2 + (m_1 - m_2)^2 v_1}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)^2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$5.10.16. \quad h = 1 - \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = 0.13 m, \quad v = \frac{m_2 \sqrt{2gh}}{m_1} = 800 \frac{m}{s}$$

$$m_2 = 5 kg, \quad m_1 = 0.01 kg$$

$$6.9.1. \quad \Delta \rho = -\beta \rho \Delta T, \beta - \text{współczynnik rozszerzalności objętościowej}$$

$$6.9.2. \quad 0.33 \cdot 10^{-26} kg(H_2), 4.65 \cdot 10^{-26} kg(N_2), 2.99 \cdot 10^{-26} kg(H_2O).$$

$$6.9.3. \quad \text{Około } 6 \cdot 10^{22} \text{ atomów.}$$

$$6.9.4. \quad \mu = 4 \text{ kg/mol (hel)}$$

$$6.9.5. \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = 1838 \frac{m}{s}$$

$$6.9.6. \quad p = 1.6 \text{ kW.}$$

$$6.9.7. \quad p_{O_2} = 0.814 \cdot 10^4 \text{ Pa}, p_{H_2} = 13.0 \cdot 10^4 \text{ Pa.}$$

$$6.9.8. \quad c = 670 \text{ J/kg} \cdot K.$$

$$6.9.9. \quad 4.19 \text{ J/cal}$$

$$6.9.10. \quad W = -322 J$$

$$6.9.11. \quad \text{Sprawność wynosi } \eta = 9.3\%; \text{ ciepło przekazane w ciągu jednego cyklu } Q_1 \text{ wnosi } 3.1 \text{ kJ, natomiast współczynnik chłodzenia chłodziarki}$$

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = 9.3.$$

6.9.12. $\Delta S = + 0.288 \text{ cal/stop}$, entropia wzrosła.

$$7.17.1. \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2aQ}{(a^2 + r^2)^{3/2}}$$

7.17.2. $F = \frac{Q^2}{a^2} \sqrt{2} + \frac{Q^2}{a^2}$, $F = 1.7 \cdot 10^{-2} \text{ N}$; siła ta jest skierowana wzdłuż przekątnej od jego środka.

$$7.17.3. \quad U = U_{12} + U_{13} + U_{23} = -9.0 \cdot 10^{-3} \text{ J}.$$

$$7.17.4. \quad \varphi = \left(\frac{Q_1}{a} + \frac{Q_2}{a} + \frac{Q_3}{a} + \frac{Q_4}{a} \right) \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = -20 \cdot 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{m}} = 180 \text{ V}, \quad E = 2546 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$7.17.5. \quad x = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{Q_1}{Q_2}}}.$$

$$7.17.7. \quad B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{a}.$$

$$7.17.8. \quad F_a = 5.0 \cdot 10^{-3} \text{ N}, \quad F_b = 1.0 \cdot 10^{-2} \text{ N}, \quad \phi = 25.12 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$$

7.17.9. $I_1 = 2.25 \text{ A}$. Prąd przekracza tolerancję dla tego amperomierza.

$$7.17.10. \quad I = 0.539 \text{ A}, \quad I_1 = 0.419 \text{ A}, \quad I_2 = 0.12 \text{ A}.$$

$$7.17.11. \quad I = \frac{E_1 R_{W2} + E_2 R_{W1}}{R R_{W1} + R_{W1} R_{W2} + R R_{W2}}.$$

$$7.17.12. \quad 2C.$$

$$7.17.13. \quad R = 3800 \Omega.$$

$$7.17.14. \quad R_{\text{dod}} = \frac{U}{I_a} - R = 105.5 \Omega, \text{ gdzie } U = 220 \text{ V}.$$

$$7.17.15. \quad E = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} = -13.6 \text{ eV}$$

$$7.17.16. \quad r = \frac{mv}{QB} = 0.11 \text{ m}, \quad T = 3.6 \cdot 10^{-7} \text{ s}, \quad \nu = \frac{QB}{2m\pi} = 2.8 \cdot 10^6 \text{ obrotów/s}.$$

$$7.17.17. \varphi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} = 29V$$

$$7.17.18. R = 6\Omega, \quad R_w = 4\Omega.$$

$$7.17.19. B = \frac{\mu_0}{8\pi r^2} \frac{e^2}{\sqrt{\pi\epsilon_0 r m}} = 12.4T$$

8.12.1. Wypromieniowana moc w ciągu czasu t , wynosi $E = 4\pi r^2 \sigma T^4 t = 5.4 \cdot 10^{27} cal$.
Energia otrzymana przez powierzchnię $1 m^2$ w ciągu czasu t wynosi

$$a = \frac{E}{4\pi R^2} = 1.9 \cdot 10^4 cal.$$

$$8.12.2. T = \sqrt[4]{\frac{\phi}{4\pi R^2 \sigma}}.$$

$$8.12.3. \text{Z wykresu otrzymujemy; } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1 Vs}{2.5 \cdot 10^{14}},$$

$$\text{stad } h = e \operatorname{tg} \alpha = 6.4 \cdot 10^{-34} Ja$$

$$8.12.4. \frac{mV^2}{2} \geq W, \quad \text{stad } v \geq \sqrt{\frac{2W}{m}} = 1.3 \cdot 10^6 m/s$$

8.12.5.

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu - W = \frac{hc}{\lambda} - W, \quad \text{stad } v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{hc}{\lambda} - W \right)}$$

$$v = 0.6 \cdot 10^6 m/s.$$

$$8.12.6. \frac{E_1}{E_2} = 4000.$$

$$8.12.7. \frac{hc}{\lambda} = \frac{3}{2} kT, \quad T = 9600 K.$$

$$8.12.8. P = n \frac{hc}{\lambda}, \quad n = 1.2 \cdot 10^{21} \text{ fotonów.}$$

8.12.9. 2, 6, 2, 6, 10, 2, 6, 10, 14.

8.12.10. Pierwiastkiem tym jest potas. Górne wskazania oznaczają liczby elektronów na podpowłokach 1s, 2s., ... 4d.

$$8.12.11. \quad 1s^2 2s^2 2p^2, \quad 1s^2 2s^2 2p^4, \quad 1s^2 2s^2 2p^6 3s^1, \quad 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6.$$

8.12.12. $n = 3$ dla wszystkich podpowłok

dla pierwszej podpowłoki:

$$l = 0, j = 1/2, m_j = -1/2, +1/2$$

dla drugiej podpowłoki:

$$l = 1, j = 1/2, m_j = -1/2, +1/2$$

dla trzeciej podpowłoki:

$$l = 1, j = 3/2, m_j = -3/2, -1/2, +1/2, +3/2$$

dla czwartej podpowłoki:

$$l = 2, j = 3/2, m_j = -3/2, -1/2, +1/2, +3/2$$

dla piątej podpowłoki:

$$l = 2, j = 5/2, m_j = -5/2, -3/2, -1/2, +1/2, +3/2, +5/2.$$

$$8.12.13. \lambda = 6563 \cdot 10^{-10} m, \lambda = 4861 \cdot 10^{-10} m, \lambda = 4350 \cdot 10^{-10} m.$$

$$9.9.1. E = mc^2, \quad m = 1.66 \cdot 10^{-27} kg, \quad E = 931.5 MeV.$$

$$9.9.2. Q_w = \Delta m \cdot 931.5 MeV, \text{ gdzie } \Delta m = Zm_p + Nm_n - M$$

Z - liczba protonów o masie m_p ,

N - liczba neutronów o masie m_n ,

M - masa atomu, dla którego oblicza się energię wiązania dla 2_1H $m_p = 1.007598 u$

$$m_n = 1.008982 u$$

$$m_p + m_n = 2.016580 u$$

$$M = 2.014102 u$$

$$\Delta m = 0.002478 u$$

$$Q_w = 0.002478 \cdot 931.5 MeV$$

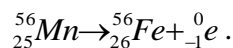
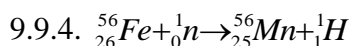
$$\text{dla } {}^4_2H \quad Q_w = 0.030556 \cdot 931.5 MeV$$

$$\text{dla } {}^7_3Li \quad Q_w = 0.062717 \cdot 931.5 MeV$$

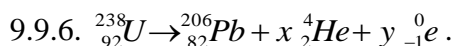
$$\text{dla } {}^{235}_{92}U \quad Q_w = 1.939509 \cdot 931.5 MeV.$$

$$9.9.3. \Delta m = -0.001093 u, \quad Q_w = 0.001093 \cdot 931.5 MeV$$

Reakcja jądra przebiega z pochłanianiem energii.



$$9.9.5. {}^4_2He, \quad {}^{30}_{14}Si, \quad {}^1_1H, \quad {}^{25}_{12}Mg.$$



gdzie: x - ilość rozpadów α

y - ilość rozpadów β

Z zasady zachowania ładunku i masy, mamy

$$82 + 2x - y = 92$$

$$206 + 4x = 238$$

$$x = 8, y = 6$$

9.9.7. Wyznaczyć tangens kąta nachylenia prostej $\ln M = f(t)$,

gdzie $M = M_0 e^{-\lambda t}$

M - masa substancji w chwili t

M_0 - masa substancji w chwili początkowej

$t = 161.5$ doby.

9.9.8. $t = 50^h$. Czas t znajdujemy jako tangens nachylenia prostej $\ln v = f(t)$, gdzie

$$v = \frac{dN}{dt} = N_0 e^{-\lambda t}$$

9.9.9. Niech m_0 jest początkową ilością radu.

Po czasie t , mamy

$$m = m_0 2^{-t/T}$$

Z warunków zadania $m = 0.95 m_0$, stąd $t = 120.6$ lat.

LITERATURA

- Brański W., Herman M., Widomski L., Zbiór zadań z fizyki, Elektryczność i Magnetyzm, Warszawa PWN 1981
- Cedrik M.S., pod redakcją, Zadania z fizyki, wydanie III, Warszawa PWN 1975
- Cooper L.N., Istota i struktura fizyki, Warszawa PWN 1975
- Crawford F.C., Fale, wydanie III popr., Warszawa PWN 1975
- Feynman R., Leighton R., Sands M., Feynmana wykłady z fizyki, tom I, część 2, Warszawa PWN 1974, tom II, część 1, część 2, Warszawa PWN 1970, tom III, Warszawa PWN 1972
- Gonczarenko S.U., Zadania z fizyki, Warszawa WNT 1972
- Halliday D., Resnick R., Fizyka, tom II Warszawa PWN 1974
- Jaworowski B.M., Piliński A.A., Elementy fizyki, tom I, tom II, Warszawa PWN 1966, 1976
- Jeżewski M., Fizyka, Podręcznik dla wyższych szkół technicznych, Warszawa PWN 1964
- Kalisz J., Massalska M., Massalski J.M., Zbiór zadań z fizyki z rozwiązaniami, Warszawa PWN 1975
- Kobuszkin W.K., Metodyka rozwiązywania zadań z fizyki, Warszawa PWN 1975
- Kresin W.E., pod redakcją, Fizyka klasyczna i jądrowa, Biblioteka problemów, Tom 240, Warszawa PWN, 1978
- Kucenko A.N., Rublew J.W., pod redakcją, Zbiór zadań z fizyki dla wyższych uczelni technicznych, Warszawa PWN, 1978
- Matthews P.T., Wstęp do mechaniki kwantowej, Warszawa PWN 1967
- Massalski J., Fizyka dla inżynierów, tom I, tom II, Warszawa WNT 1975
- Massalski J., Massalska M., Fizyka dla inżynierów, tom I, Warszawa WNT, 1975
- Purcell E.M., Elektryczność i Magnetyzm, Warszawa PWN 1975
- Reif F., Fizyka statystyczna, Warszawa PWN 1971
- Resnik R., Halliday D., Fizyka dla studentów nauk przyrodniczych i technicznych, Tom I, Warszawa PWN, 1966
- Sawicki M., Dunin-Borkowski J., Gabryelki E., Gebura G., Rubaj S., Nauczanie fizyki, część I, Warszawa WSiP 1976
- Sawicki M., Bąk H., Morawiec J., Toker D., Nauczanie fizyki, część II, Warszawa WSiP 1978
- Skilling H.H., Fale elektromagnetyczne, Warszawa PWN 1954
- Staniszewski B., Termodynamika, Warszawa PWN 1978
- Szczeniowski Sz., Fizyka doświadczalna, część III, Elektryczność i magnetyzm, wyd. IV popr. Warszawa PWN 1972, część V, Fizyka atomowa, Warszawa PWN 1967
- Wegner W., Fizyka dla kierunku Wychowania Technicznego, część I, Wyd. III poprawione, Akademia Bydgoska im. Kazimierza Wielkiego, 2001
- Wegner W., Fizyka dla kierunku Wychowania Technicznego, część II, Wyd. III poprawione, Akademia Bydgoska im. Kazimierza Wielkiego, 2001
- Wichmann E.H., Fizyka kwantowa, Warszawa PWN 1975

ANEKS 1

Niektóre często spotykane jednostki fizyczne

Jednostki masy	$1 u = 1,66043 \cdot 10^{-27} \text{ kg} =$ $= 931,478 \text{ MeV}$
Jednostki długości	$1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ $1 \mu = 10^{-6} \text{ m}$ $1 \text{ m}\mu = 10^{-9} \text{ m}$ $1 \text{ rok świetlny} = 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}$ $1 \text{ pc} = 3,26 \text{ lat świetlnych}$ $1 \text{ A.U.} = 1,495 \cdot 10^{10} \text{ m}$ $1 \text{ fermi} = 10^{-15} \text{ m}$
Jednostki powierzchni	$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$
Jednostki siły	$1 \text{ kG} = 9,80665 \text{ N}$ $1 \text{ dyna} = 10^{-5} \text{ N}$
Jednostki pracy, energii i ciepła	$1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$ $1 \text{ kGm} = 9,81 \text{ J}$ $1 \text{ cal} = 4,19 \text{ J}$ $1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$ $1 \text{ eV} = 1,602191 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ $1 \text{ MeV} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$
Jednostki mocy	$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$ $1 \text{ KM} = 736 \text{ W}$
Jednostki ciśnienia	$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ $1 \text{ at} = 1 \text{ kG/cm}^2 = 9,81 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$ $1 \text{ atm} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ N/m}^2$

ANEKS 2

Uniwersalne stałe fizyczne

Nazwa	Symbol	Wartość liczbowa
Prędkość światła w próżni	c	$2,997925 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$
Stała grawitacji	G	$6,670 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$
Przenikalność magnetyczna próżni	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$
Przenikalność dielektryczna próżni	ϵ_0	$8,85418 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$
Ładunek elektronu	e	$1,60210 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Masa spoczynkowa elektronu	m_e	$9,1091 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Masa spoczynkowa protonu	m_p	$1,67252 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masa spoczynkowa neutronu	m_n	$1,67252 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Stała Plancka	h	$6,6256 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Stała struktury subtelnej	α	$7,29720 \cdot 10^{-3}$
Stosunek em_e^{-1}	em_e^{-1}	$1,758796 \cdot 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$
Comptonowska długość fali dla elektronu	λ_C	$2,42621 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
Stała Rydberga	R_∞	$1,0973731 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$
Promień Bohra	a_0	$5,29167 \cdot 10^{-11} \text{ m}$
Uniwersalna stała gazowa	R	$8,3143 \text{ J/k.mol}$
Liczba Avogadra	N_0	$6,02252 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Objętość normalna 1 mola gazu doskonałego		$2,24136 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3\text{mol}^{-1}$
Stała Boltzmanna	k	$1,38054 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$
Klasyczny promień elektronu	r_0	$2,81777 \cdot 10^{-15} \text{ m}$
Potrójny punkt wody		$273,16 \text{ K (0,01}^\circ\text{) C}$

ANEKS 3

Reguły obliczania niektórych pochodnych i całek

$y = c, c = \text{const}$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^2$	$y' = 2x$
$y = (x)^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = a^x, a > 0$	$y' = a^x \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = (\log_a x), a \neq 1, 0 < a < 1$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \ln x, x > 0$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
Jeżeli funkcje f i g posiadają pochodne w punkcie x , to:	$[cf(x)]' = cf'(x), c - \text{stała}$ $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$ $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
<p>Funkcją pierwotną danej funkcji $f(x)$ na przedziale X nazywamy każdą różniczkowaną funkcję $F(x)$, której pochodna $F'(x)$ jest równa funkcji $f(x)$ na tym przedziale, tj. gdy</p> <p>$F'(x) = f(x)$ dla $x \in X$.</p>	$\int f(x)dx = F(x) + C, C = \text{const}$ $\int 0dx = C$ $\int dx = x + C$ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$ $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ $\int e^x dx = e^x + C$ $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \cos x dx = \sin x + C$
	$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$ $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$